

# Inhaltsverzeichnis.

## Erster Teil.

### Die allgemeinen Thetafunktionen mit beliebigen Charakteristiken.

#### Erstes Kapitel.

##### Definition und Haupteigenschaften der Thetafunktionen.

	Seite
<b>§ 1. Die einfach unendliche Thetareihe . . . . .</b>	<b>3</b>
Definition der einfach unendlichen Thetareihe. — Notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung. — Die Thetafunktion $\vartheta(u)$ . — Historisches. — Die Eigenschaften der Funktion $\vartheta(u)$ . — Bestimmung der Funktion durch diese. — Der Werteverlauf von $\vartheta(u)$ . Reduktion auf das Parallelogramm $\Pi_0$ . — Verschwinden der Funktion $\vartheta(u)$ . — Die Funktion $\vartheta(u)$ eine gerade Funktion.	
<b>§ 2. Die <math>p</math>-fach unendliche Thetareihe. Ermittlung einer notwendigen und hinreichenden Konvergenzbedingung . . . . .</b>	<b>9</b>
Definition der $p$ -fach unendlichen Thetareihe. — Notwendige Konvergenzbedingung. — Nachweis mit Hilfe einer Jacobischen Darstellung einer definitiven quadratischen Form, daß diese Konvergenzbedingung auch hinreichend ist.	
<b>§ 3. Andere Formen für die Konvergenzbedingung . . . . .</b>	<b>15</b>
Die gefundene Konvergenzbedingung wird durch $p$ Ungleichheiten für die reellen Teile $r_{\mu\mu'}$ der Größen $a_{\mu\mu'}$ ausgedrückt. — Sie wird weiter als identisch mit der Bedingung nachgewiesen, daß die aus diesen Größen $r_{\mu\mu'}$ gebildete quadratische Form eine ordinäre negative ist. — Endgültige Formulierung der Konvergenzbedingung im VIII. Satze. — Historisches. — Einteilung der Konvergenzbeweise in zwei Klassen. — Beweise der ersten Klasse von Weierstraß, Christoffel und Prym; der zweiten Klasse von Riemann und Thomae.	
<b>§ 4. Die Funktion <math>\vartheta(u_1   u_2   \dots   u_p)</math>. . . . .</b>	<b>22</b>
Die Thetafunktion $\vartheta(u_1   \dots   u_p)$ . — Historisches. — Die Eigenschaften der Funktion $\vartheta(u_1   \dots   u_p)$ . — Bestimmung der Funktion durch diese. — Der Werteverlauf von $\vartheta(u_1   \dots   u_p)$ . Reduktion auf das Parallelotop $\Pi_0$ . — Gemeinsame Nullpunkte von $p$ Thetafunktionen.	

**§ 5. Einführung der Charakteristiken. Die Funktion  $\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (u)$  . . . . . 29**

Die Periodencharakteristik  $\left( \begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix} \right)$  eines Größensystems  $c_1, \dots, c_p$ .  
 — Die Thetafunktion  $\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix} \right] (u_1 | \cdots | u_p)$ ; ihr Zusammenhang mit der früheren Funktion  $\vartheta(u_1 | \cdots | u_p)$ . — Die Thetacharakteristik  $\left[ \begin{smallmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{smallmatrix} \right]$ .  
 — Abgekürzte Bezeichnungen. — Historisches. Thetafunktionen mit komplexen Charakteristiken. — Die Eigenschaften der Funktion  $\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (u)$ .  
 — Bestimmung der Funktion durch diese. — Drei Hilfsformeln. — Normalcharakteristiken. Kongruente Charakteristiken. Nicht wesentlich verschiedene Thetafunktionen.

**§ 6. Thetafunktionen höherer Ordnung . . . . . 36**

Verallgemeinerung jener Funktionalgleichung, durch welche  $\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (u)$  bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist. — Definition der Thetafunktion  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $\Theta_n \left[ \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (u)_a$ . — Darstellung durch gewöhnliche Thetafunktionen. — Anzahl der linearunabhängigen Funktionen  $\Theta_n \left[ \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (u)$  mit gegebener Charakteristik. — Historisches. — Nullpunkte einer Thetafunktion  $n^{\text{ter}}$  Ordnung einer Veränderlichen. — Gemeinsame Nullpunkte von  $p$  Thetafunktionen höherer Ordnung von  $p$  Veränderlichen.

## Zweites Kapitel.

### Über ein allgemeines Prinzip der Umformung unendlicher, insbesondere mehrfach unendlicher Reihen und dessen Anwendung auf Thetareihen.

**§ 1. Umformung unendlicher Reihen durch Einführung neuer Summationsbuchstaben vermittelt einer linearen Substitution . . . . . 44**

Einführung neuer Summationsbuchstaben durch eine lineare Substitution mit rationalen Koeffizienten. — Bestimmung der Summation über die neuen Summationsbuchstaben. — Aufhebung der vorhandenen Beschränkung der Summation über die neuen Summationsbuchstaben durch Einschiebung eines Faktors. — Vorläufiges Endresultat in Formel (25). — Diskussion des erhaltenen Resultats. — Beispiele. — Historisches.

**§ 2. Bestimmung der Anzahl  $s$  der Normallösungen eines Systems linearer Kongruenzen . . . . . 51**

Vorläufiger Ausdruck für die Anzahl  $s$  der Normallösungen eines Systems homogener linearer Kongruenzen. — Das konjugierte Kongruenzensystem. — Die durch gegebene lineare Formen darstellbaren Zahlensysteme. Anzahl  $t$  derselben. Zusammenhang zwischen  $s$  und  $t$ . — Der spezielle Fall der unimodularen linearen Substitutionen. — Bilineare Formen. Rang und Elementarteiler einer bilinearen Form mit ganzzahligen Koeffizienten. Äquivalente Formen. Normalform. — Berechnung der Zahl  $s$ .

§ 3. **Folgerungen aus dem III. Satze; endgültige Gestalt der Formel (25)** 57  
 Bestimmung der Zahl  $s$  in einigen speziellen Fällen. — Endgültige Gestalt des Resultates des § 1. Diskussion der gewonnenen Endformel (X). — Aufstellung eines Systems linearer Gleichungen zwischen unendlichen Reihen — Auflösung desselben. Umkehrung der Formel (X).

§ 4. **Anwendung der Formel (X) auf eine  $p$ -fach unendliche Thetareihe** . . . . . 65  
 Allgemeinste Umformung einer  $p$ -fach unendlichen Thetareihe durch Einführung neuer Summationsbuchstaben mittelst einer linearen Substitution mit rationalen Koeffizienten. — Spezielle Formeln. — Historisches.

§ 5. **Beziehungen zwischen Thetafunktionen, deren Modulen sich um rationale Vielfache von  $\pi i$  unterscheiden** . . . . . 70  
 Änderung der Modulen einer Thetafunktion um ganze Vielfache von  $\pi i$ . — Änderung der Modulen einer Thetafunktion um gebrochene Vielfache von  $\pi i$ . Vorläufige Formel (108). — Untersuchung der hierbei aufgetretenen  $p$ -fachen Gaußschen Summe  $G[\sigma]$ . — Endgültige Formel (XXIV). — Historisches.

§ 6. **Anwendung der Formel (X) auf ein Produkt von Thetareihen** . . . 77  
 Umformung eines Produktes von  $n$   $p$ -fach unendlichen Thetareihen, deren Modulen ganzzahlige Vielfache der Modulen einer einzigen Thetafunktion sind, durch Einführung neuer Summationsbuchstaben mittelst einer linearen Substitution mit rationalen Koeffizienten. — Umkehrung der gewonnenen Thetaformel. — Über die allgemeinste derartige Umformung eines Thetaproduktes.

§ 7. **Erste Spezialisierung der Formel (XXXII)** . . . . . 84  
 Die Zahl  $r$  hat den Wert Eins. — Hauptformel. — Der spezielle Fall des Produktes von zwei Thetafunktionen. Schrötersche Thetaformeln.

§ 8. **Zweite Spezialisierung der Formel (XXXII)** . . . . . 90  
 Die sämtlichen Zahlen  $p$  und  $q$  haben den Wert Eins. Prymsche Thetaformel.

Drittes Kapitel.

Ein zweites allgemeines Prinzip der Umformung unendlicher Reihen und dessen Anwendung auf Thetareihen.

§ 1. **Umformung einer einfach unendlichen Reihe mittelst der Fourierschen Formel** . . . . . 93  
 Ableitung der Fourierschen Formel aus der Laurentschen Reihe. — Anwendung derselben auf das allgemeine Glied einer beliebigen unendlichen Reihe; die dadurch bewirkte Umformung der unendlichen Reihe.

§ 2. **Anwendung der Formel (I) auf die einfach unendliche Thetareihe** 96  
 Umformung der einfach unendlichen Thetareihe mittelst der Fourierschen Formel. — Der Übergang von reellem zu lateralem Argument.

<b>§ 3.</b>	<b>Ausdehnung der in § 1 angegebenen Umformung auf mehrfach unendliche Reihen . . . . .</b>	99
	Die Fouriersche Formel für Funktionen mehrerer Veränderlichen. — Ihre Anwendung zur Umformung einer beliebigen mehrfach unendlichen Reihe.	
<b>§ 4.</b>	<b>Über eine Eigenschaft der Thetamodulen <math>a_{\mu\mu'}</math> . . . . .</b>	102
	Die mit Thetamodulen $a_{\mu\mu'}$ als Koeffizienten gebildete quadratische Form. — Eine Darstellung derselben als Summe von $p$ Quadraten linearer Formen; daraus folgende Eigenschaft der Thetamodulen $a_{\mu\mu'}$ .	
<b>§ 5.</b>	<b>Anwendung der Formel (IV) auf eine <math>p</math>-fach unendliche Theta-reihe . . . . .</b>	105
	Umformung der $p$ -fach unendlichen Thetareihe vermittelt der Fourierschen Formel. — Anzahl der verschiedenen derartigen Formeln. — Der besondere Fall $q = p$ .	

### Viertes Kapitel.

#### Darstellung allgemeiner $2p$ -fach periodischer Funktionen durch Thetafunktionen.

<b>§ 1.</b>	<b>Bildung <math>2p</math>-fach periodischer Funktionen mit Hilfe von Thetafunktionen. . . . .</b>	110
	Über $2p$ -fach periodische Funktionen von $p$ Veränderlichen im allgemeinen. — Definition unabhängiger, primitiver und äquivalenter Periodensysteme. — Einteilung des $2p$ -dimensionalen Raumes in Parallelotope; kongruente Raumpunkte, Systeme von Gitterpunkten. — Möglichkeit einer mehr als $2p$ -fach periodischen Funktion von $p$ Veränderlichen. — Der Quotient zweier zur nämlichen Charakteristik gehörigen Thetafunktionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung eine $2p$ -fach periodische Funktion; ihre $2p$ Periodensysteme. — Über die Reduktion der $2p$ Periodensysteme einer beliebigen $2p$ -fach periodischen Funktion auf diese.	
<b>§ 2.</b>	<b>Allgemeine Sätze über <math>2p</math>-fach periodische Funktionen . . . . .</b>	114
	Die Weierstraßschen und der Riemannsches Satz über $2p$ -fach periodische Funktionen. — Historisches.	
<b>§ 3.</b>	<b>Reduktion der Perioden einer allgemeinen <math>2p</math>-fach periodischen Funktion auf eine Normalform. . . . .</b>	120
	Reduktion der nach dem Riemannschen Satze zwischen den Perioden einer $2p$ -fach periodischen Funktion bestehenden bilinearen Relationen auf die Normalform durch Übergang zu passend gewählten $2p$ äquivalenten Periodensystemen. — Ergänzung des Beweises des VI. Satzes. — Nachweis des Nichtverschwindens gewisser aus Perioden gebildeter Determinanten $p^{\text{ten}}$ Grades. — Normalisierung der Perioden durch Einführung neuer Variablen. — Nachweis, daß die jetzt in den zweiten $p$ Periodensystemen auftretenden Perioden die Eigenschaften von Thetamodulen haben. — Schlußbemerkung.	
<b>§ 4.</b>	<b>Darstellung der allgemeinen <math>2p</math>-fach periodischen Funktionen durch Thetafunktionen. . . . .</b>	126
	Bildung von Funktionen mit den $2p$ Periodensystemen (XII) mit	

Hilfe von Thetafunktionen. — Dadurch erbrachter Nachweis, daß die Bedingungen des Riemannsches Satzes für die Existenz von  $2p$ -fach periodischen Funktionen hinreichen. — Schlußsatz: Alle  $2p$ -fach periodischen Funktionen sind durch Thetafunktionen darstellbar.

Fünftes Kapitel.

Die Transformation der Thetafunktionen.

§ 1. Das Transformationsproblem . . . . . 128

Ableitung der Thetafunktionen aus allgemeineren Funktionen mit nicht normalisierten Perioden. — Notwendige Bedingungen für das Bestehen einer algebraischen Gleichung zwischen  $2p$ -fach periodischen Funktionen mit verschiedenen Perioden. — Ordinäre und singuläre Transformationen. — Definition der (ordinären) Transformation der Perioden. — Erste Form der Bedingungsgleichungen für die Transformationszahlen. — Grad oder Ordnung der Transformation. — Ganzzahlige Transformation; lineare Transformation. — Charakteristik der Transformation. — Bezeichnungen. — Historisches.

§ 2. Weitere Eigenschaften der Transformationszahlen  $c_{\alpha\beta}$  . . . . . 133

Die Determinante  $C$  der Transformationszahlen  $c_{\alpha\beta}$  und ihre Unterdeterminanten  $\gamma_{\alpha\beta}$ . — Der Wert von  $C^2$ . — Beziehungen zwischen den  $c$  und den  $\gamma$ . — Zweite Form der Bedingungsgleichungen für die Transformationszahlen. — Der Wert von  $C$ . — Beziehung zwischen dem Inhalte des ursprünglichen und des transformierten Periodenparallelotops.

§ 3. Beziehungen zwischen den Argumenten und Modulen der ursprünglichen und der transformierten Thetafunktionen . . . . . 138

Ableitung der Gleichungen zwischen den alten und den neuen Argumenten. — Ableitung der Gleichungen zwischen den alten und den neuen Modulen.

§ 4. Zusammensetzung von Transformationen . . . . . 142

Definition der aus zwei Transformationen  $T$  und  $T'$  zusammengesetzten Transformation  $TT'$ ; ihre Ordnung. — Die Gruppe der Transformationen. — Die identische Transformation  $J$ . — Die inverse Transformation  $T^{-1}$ . — Zusammensetzung einer gegebenen Transformation aus mehreren.

§ 5. Zusammensetzung einer ganzzahligen linearen Transformation aus elementaren . . . . . 148

Beziehung zwischen dem ursprünglichen und dem transformierten Periodengitter bei ganzzahliger linearer Transformation. — Die Gruppe der ganzzahligen linearen Transformationen. — Die Transformationen  $A_\rho^{-1}, B_\rho^{-1}, C_{\rho\sigma}^{-1}, D_{\rho\sigma}^{-1}$  ( $\rho, \sigma = 1, 2, \dots, p$ ) und ihre Wirkung bei der Zusammensetzung mit einer beliebigen Transformation; dadurch erzielte Reduktion der allgemeinen ganzzahligen linearen Transformation auf die identische. — Zusammensetzung einer beliebigen ganzzahligen linearen Transformation aus den elementaren  $A_\rho, B_\rho, C_{\rho\sigma}, D_{\rho\sigma}$  ( $\rho, \sigma = 1, 2, \dots, p$ ). — Reduktion dieser auf  $p+2$  unter ihnen. — Der Fall  $p=1$ ; die beiden erzeugenden Transformationen  $A, B$ . — Der Fall  $p=2$ ; die vier elementaren Transformationen  $A, B, C, D$ ; ihre Zusammensetzung

aus zwei erzeugenden  $M, N$ . — Mindestzahl der erzeugenden Transformationen im Falle  $p \geq 3$ .

- § 6. Zurückführung ganzzahliger nichtlinearer Transformationen auf eine endliche Anzahl nicht äquivalenter . . . . .** 156
- Definition äquivalenter Transformationen. Einteilung der ganzzahligen nichtlinearen Transformationen eines Grades in Klassen. Repräsentanten. — Reduktion der allgemeinen ganzzahligen nichtlinearen Transformation durch Zusammensetzung mit den Transformationen  $A_\rho^{-1}, B_\rho^{-1}, C_{\rho\sigma}^{-1}, D_{\rho\sigma}^{-1}$  ( $\rho, \sigma = 1, 2, \dots, p$ ). — Endlichkeit der Klassenanzahl. — Aufstellung von Repräsentanten und Bestimmung der Klassenanzahl im Falle  $p = 1$  und unter Beschränkung auf einen Primzahlgrad für die Fälle  $p = 2$  und  $3$ . — Historisches.
- § 7. Zusammenhang der ursprünglichen und der transformierten Thetafunktion im Falle ganzzahliger Transformation . . . . .** 164
- $\wp \left[ \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (u)_a$  als Funktion der transformierten Argumente  $u'$ . — Einführung der Funktion  $II(u')$ ; Nachweis, daß diese eine Thetafunktion  $n^{\text{ter}}$  Ordnung von den Argumenten  $u'$  und den Modulen  $a'$  ist. — Über die Lösung des Transformationsproblems der Thetafunktionen im Falle ganzzahliger Transformation. — Über gewisse lineare Relationen zwischen Thetafunktionen mit verschiedenen Argumenten und Modulen.
- § 8. Die ganzzahlige lineare Transformation der Thetafunktionen . . . . .** 172
- Bestimmung der Transformationskonstanten. — Die Formel für die ganzzahlige lineare Transformation. — Schlußbemerkung.
- § 9. Der besondere Fall  $p = 1$  . . . . .** 183
- Die Formel für die ganzzahlige lineare Transformation im Falle  $p = 1$ . — Darstellung der in der Transformationskonstante auftretenden Summe  $G\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$  durch Gaußsche Summen  $\varphi(h, n)$  und ihre Auswertung. — Eigenschaften der Summe  $G\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$ . — Thomae'sche Methode zur Bestimmung der Transformationskonstante. — Historisches.
- § 10. Zurückführung nichtganzzahliger Transformationen auf ganzzahlige. Die Multiplikation und die Division . . . . .** 193
- Die supplementäre Transformation  $T_1$ . — Die Multiplikation  $M$  und die Division  $M^{-1}$ . — Zusammensetzung einer nichtganzzahligen Transformation aus einer Division und einer ganzzahligen Transformation. — Die Formel für die Multiplikation und für die Division der Thetafunktionen.
- § 11. Krazer-Prymsche Zusammensetzung einer Transformation aus elementaren . . . . .** 198
- Die elementaren linearen Transformationen erster, zweiter und dritter Art. — Die singuläre lineare Transformation und ihre Zusammensetzung aus elementaren. — Zusammensetzung der nichtsingulären linearen Transformation aus elementaren im Falle  $\Delta_{II} \neq 0$  — Zurückführung des Falles  $\Delta_{II} = 0$  auf diesen vermittelt einer elementaren

linearen Transformation dritter Art. — Über die Lösung des Transformationsproblems für eine beliebige lineare Transformation. — Die nichtlinearen elementaren Transformationen  $N$  und  $N^{-1}$  und die Zusammensetzung einer beliebigen nichtlinearen Transformation aus diesen und einer linearen. — Die ganzzahlige nichtlineare Transformation und die zu ihr gehörige Transformationsformel.

## Sechstes Kapitel.

### Die komplexe Multiplikation.

- 1. Die komplexe Multiplikation der Thetafunktionen einer Veränderlichen** . . . . . 208
- Die reelle und die komplexe Multiplikation doppelperiodischer Funktionen. — Notwendige und hinreichende Bedingung für die Perioden  $\omega_1, \omega_2$ . — Übergang zu den Thetafunktionen; prinzipale Transformation; notwendige und hinreichende Bedingung für den Modul  $a$ , für die Transformationszahlen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . — Beispiele. — Historisches.
- 2. Einige Sätze aus der Lehre von den bilinearen Formen** . . . . . 214
- Die Summe und das Produkt zweier Formen. — Die konjugierte Form  $A'$ . — Die reziproke Form  $A^{-1}$ ; Division zweier Formen. — Die charakteristische Determinante oder Funktion einer Form  $A$ ; ihre Elementarteiler. — Äquivalente Formen. — Ähnliche Formen; Gleichheit ihrer Elementarteiler. — Die Formen  $R$ , für welche  $R_0' = R^{-1}$ ; ihre charakteristische Determinante. — Die Formen  $A$ , für welche  $A_0' = A$ ; definite Formen; Transformation solcher in sich.
- 3. Die komplexe Multiplikation bei den Thetafunktionen mehrerer Veränderlichen** . . . . . 220
- Die reelle und die komplexe Multiplikation der  $2p$ -fach periodischen Funktionen. — Übergang zu den Thetafunktionen; prinzipale Transformation derselben. — Notwendige Bedingung für die charakteristische Funktion  $|T - zJ|$  bei einer prinzipalen Transformation.
- 4. Nachweis, daß die im IX. Satz angegebene notwendige Bedingung auch hinreichend ist.** . . . . . 225
- Einteilung der  $2p$  Wurzeln  $m_\rho$  der Gleichung  $|T - zJ| = 0$  in  $p$  Wurzeln 1. Art und  $p$  Wurzeln 2. Art. — Lösungen 1. und 2. Art der Gleichungen (103). — Eigenschaften der Lösungen 1. Art. — Eigenschaften der Lösungen 2. Art. — Die einer Wurzel  $m_\rho$  zugeordnete bilineare Form  $Z$ . — Berechnung der Modulen  $a_{\mu\nu}$  für die prinzipale Transformation. Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit dieser Bestimmung. — Sätze über prinzipale Transformationen. — Historisches und Schlußbemerkung.

## Zweiter Teil.

## Die allgemeinen Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken.

## Siebentes Kapitel.

## Die Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind.

	Seite
<b>§ 1. Die Funktionen <math>\vartheta[\varepsilon]_2(u)</math></b> . . . . .	239
Definition und Haupteigenschaften von $\vartheta[\varepsilon]_2(u)$ . — Anzahl der verschiedenen Funktionen; Zusammenhang derselben unter einander. — Gerade und ungerade Funktionen; Verschwinden von $\vartheta[\varepsilon]_2(u)$ .	

## Erster Abschnitt.

## Die Charakteristikentheorie.

<b>§ 2. Periodencharakteristiken</b> . . . . .	242
System zusammengehöriger Halber der Perioden; seine Per. Char. ( $\varepsilon$ ). — Lineare Transformation der Per. Char. — Uneigentliche und eigentliche Per. Char. — Summe mehrerer Per. Char. — Unabhängige Per. Char. — Kombination $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung gegebener Per. Char. — Das Symbol $ \varepsilon, \eta $ . — Syzygetische und azygetische Per. Char.	
<b>§ 3. Thetacharakteristiken</b> . . . . .	247
Lineare Transformation der Th. Char. — Gerade und ungerade Th. Char. — Charakter $ \varepsilon $ . — Direkter Nachweis, daß bei linearer Transformation der Charakter ungeändert bleibt. — Bestimmung der Anzahl der geraden und ungeraden Th. Char. — Summe mehrerer Th. Char. — Wesentlich unabhängige Th. Char. — Kombination $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung gegebener Th. Char. — Wesentliche Kombinationen. — Das Symbol $ \varepsilon, \eta, \zeta $ . — Syzygetische und azygetische Th. Char.	
<b>§ 4. Beziehungen zwischen den Periodencharakteristiken und den Thetacharakteristiken</b> . . . . .	253
Das verschiedene Verhalten von Per. Char. und Th. Char. bei linearer Transformation. — Beziehungen zwischen den Symbolen $ \varepsilon, \eta $ für Per. Char. und $ \varepsilon ,  \varepsilon, \eta, \zeta $ für Th. Char. — Charakter einer Summe mehrerer Th. Char. — Zerlegung einer Per. Char. in zwei Th. Char. — Drei Arten solcher Zerlegungen; Bestimmung von deren Anzahl. — Die in einer Gruppe enthaltenen und gepaart enthaltenen Th. Char. — Bestimmung der in zwei und mehreren Gruppen gemeinsam enthaltenen Th. Char.	
<b>§ 5. Fundamentalsysteme von Periodencharakteristiken</b> . . . . .	267
Definition eines F. S. von Per. Char. — Bildungsgesetz und Anzahl der F. S. — Darstellung aller Per. Char. durch die Per. Char. eines F. S. — Übergang von einem F. S. von Per. Char. zu allen anderen. — Übergang zu den Th. Char. — Darstellung der $2^{2p}$ Th. Char. durch die $2p + 1$ Per. Char. eines F. S. — Entscheidung, ob eine so dargestellte Th. Char. gerade oder ungerade ist. — Hauptreihe von $2p + 1$ Th. Char., Darstellung der geraden und ungeraden Th. Char.	

und der eigentlichen Per. Char. durch die  $2p + 1$  Th. Char. einer Hauptreihe.

6. Die Gruppe der mod. 2 inkongruenten ganzzahligen linearen Transformationen . . . . . 276

Definition der Gruppe  $G$  der mod. 2 inkongruenten ganzzahligen linearen Transformationen. — Bestimmung der Ordnung  $\Omega$  von  $G$ . — Andere Definition der Gruppe  $G$ . — Die zur Gruppe  $G$  holoedrisch isomorphe Gruppe  $H$  von Substitutionen der Per. Char. —  $2^{2p}$  erzeugende Substitutionen der Gruppe  $H$ . — Auffassung dieser als Substitutionen von Th. Char. — Transitivität der Gruppe. — Der besondere Fall  $p = 2$ .

7. Fundamentalsysteme von Thetacharakteristiken. . . . . 283

Definition eines F. S. von Th. Char. — Zusammenhang zwischen den F. S. von Per. Char. und den F. S. von Th. Char. — Komplex von  $2^{2p}$  F. S. von Th. Char. — Anzahl der verschiedenen F. S. von Th. Char. — Anzahl der ungeraden unter den  $2p + 2$  Th. Char. eines F. S. — Darstellung der geraden und der ungeraden Th. Char. durch die Th. Char. eines F. S. — Darstellung der Per. Char. durch die Th. Char. eines F. S. — Anzahl der F. S. mit gegebener Zahl ungerader Th. Char. — Neue Definition einer Hauptreihe von Th. Char. — F. S. von Th. Char. bei ganzzahliger linearer Transformation. — Historisches.

8. Gruppen von Periodencharakteristiken . . . . . 291

Definition einer Gruppe von Per. Char. — Rang, Ordnung und Basis einer Gruppe. — Syzygetische Untergruppe. — Die mod. einer Gruppe äquivalenten Per. Char. — Normale Basis einer Gruppe. — Gruppen von Per. Char. bei ganzzahliger linearer Transformation. — Adjungierte Gruppe. — Konjugierte Gruppe. — Syzygetische Gruppe. — Göpelsche Gruppe. Anzahl der verschiedenen Göpelschen Gruppen; Übergang von einer zu den anderen durch ganzzahlige lineare Transformation.

9. Systeme von Thetacharakteristiken. . . . . 296

Definition eines Systems von Th. Char. — Zusammenhang mit einer Gruppe von Per. Char. — Basis eines Systems. — Komplex der konjugierten Systeme. — Adjungierte Systeme. — Bestimmung der Anzahl der in einem Systeme vorkommenden geraden und ungeraden Th. Char. — Göpelsche Systeme von Th. Char. Anzahl ihrer geraden und ungeraden Th. Char. — Die zu einer syzygetischen Gruppe von Per. Char. gehörigen Systeme von lauter geraden und lauter ungeraden Th. Char. — Übergang von einem System von Th. Char. zu einem andern durch ganzzahlige lineare Transformation und durch Addition einer beliebigen Th. Char.

Zweiter Abschnitt.

Die Additionstheoreme der Thetafunktionen.

§10. Die Riemannsche Thetaformel . . . . . 305

Ableitung der Riemannschen Thetaformel aus der Formel (LVIII) pag. 91. — Folgerungen aus der Riemannschen Thetaformel. — Historisches. — Eine Erweiterung der Riemannschen Thetaformel.

<b>§ 11. Der Fall <math>p = 1</math></b> . . . . .	318
<p>Die Riemannsche Thetaformel im Falle <math>p = 1</math>. — Die Jacobischen Thetaformeln. — Die Weierstraßsche Thetaformel. — Zusammenhänge zwischen der Riemannschen, den Jacobischen und der Weierstraßschen Thetaformel. — Historisches. — Verschiedene Ableitungsmethoden der Riemannschen, Jacobischen und Weierstraßschen Thetaformeln. — Erweiterung der Weierstraßschen Thetaformel auf Produkte von mehr als vier Thetafunktionen. — Verallgemeinerung der Weierstraßschen Thetaformel für <math>p &gt; 1</math>. — Eine Folgerung aus der Riemannschen Thetaformel. — Historisches. — Relationen zwischen den vier Thetafunktionen. — Additionstheoreme der Thetaquotienten. — Die Formel <math>\vartheta'_{11} = i \vartheta_{00} \vartheta_{10} \vartheta_{01}</math>. — Übergang zu den elliptischen Funktionen.</p>	
<b>§ 12. Der Fall <math>p = 2</math></b> . . . . .	336
<p>Charakteristikentheorie: Die 10 geraden und die 6 ungeraden Th. Char. — Darstellung der 15 eigentlichen Per. Char. und der 10 geraden Th. Char. durch die 6 ungeraden Th. Char. — Die verschiedenen Zerlegungen einer eigentlichen Per. Char. in zwei Th. Char. — F. S. von Per. Char. — Hauptreihen und F. S. von Th. Char. — Göpelsche und Rosenhainsche Gruppen von Per. Char. und Systeme von Th. Char. — Thetarelationen: Lineare Relationen zwischen vier Thetaquadraten. — Darstellung aller Thetaquadrate durch 4 linearunabhängige. — Gleichung vierten Grades zwischen diesen. — Additionstheoreme der Thetaquotienten. — Historisches. — Tabelle der Bezeichnungen der 16 Thetafunktionen bei Göpel, Rosenhain, Weierstraß. — Vergleichung der Thetarelationen mit den Bedingungsgleichungen einer orthogonalen Substitution. — Die Kummersche Fläche.</p>	
<b>§ 13. Das Additionstheorem der allgemeinen Thetafunktionen für <math>p \geq 3</math></b>	346
<p>Ableitung desselben aus der Riemannschen Thetaformel. — Endformel. — Der spezielle Fall <math>p = 3</math>. — Historisches.</p>	
<b>§ 14. Weitere Folgerungen aus der Riemannschen Thetaformel</b> . . . .	351
<p>Ableitung einer Formel zwischen <math>6 \cdot 2^{p-2}</math> Thetaprodukten. — Endformel. — Spezialisierungen.</p>	
<b>§ 15. Thetafunktionen höherer Ordnung mit halben Charakteristiken</b>	357
<p>Gerade und ungerade Thetafunktionen <math>n^{\text{ter}}</math> Ordnung. — Anzahl der linearunabhängigen solchen Funktionen.</p>	
<b>§ 16. Thetarelationen</b> . . . . .	362
<p>Eigenschaften jeder Thetarelation. — Übergang von einer zu einer andern durch Vermehrung der Argumente um halbe Periodizitätsmodulen und durch lineare Transformation. — Algebraische Abhängigkeit der Relationen zwischen den <math>2^{2p}</math> Thetaquadraten. — Lineare Relationen zwischen Thetaquadraten. — Bestimmung von <math>2^p</math> linearunabhängigen. — Relationen zwischen diesen. — Verallgemeinerung der Kummerschen Fläche.</p>	

## Achstes Kapitel.

Die Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus  $r^{\text{tel}}$  Zahlen gebildet sind.

	Seite
<b>§ 1. Die Funktionen <math>\vartheta[\varepsilon]_r(u)</math></b> . . . . .	370
Definition und Haupteigenschaften von $\vartheta[\varepsilon]_r(u)$ . — Anzahl der verschiedenen Funktionen; Zusammenhang derselben untereinander.	
<b>§ 2. Periodencharakteristiken</b> . . . . .	372
System zusammengehöriger $r^{\text{tel}}$ der Perioden; seine Per. Char. ( $\varepsilon$ ). — Lineare Transformation der Per. Char. — Uneigentliche und eigentliche Per. Char. — Summe mehrerer Per. Char. — Unabhängige Per. Char. — Kombination $n^{\text{ter}}$ Ordnung gegebener Per. Char. — Das Symbol $ \varepsilon, \eta $ . — Syzygetische und azygetische Per. Char. — Definition einer Gruppe von Per. Char. — Rang, Ordnung und Basis einer Gruppe. — Adjungierte Gruppe. — Syzygetische Untergruppe. — Syzygetische Gruppe. — Göpelsche Gruppe.	
<b>§ 3. Thetacharakteristiken</b> . . . . .	378
Summe mehrerer Th. Char. — Kombination $n^{\text{ter}}$ Ordnung gegebener Th. Char. — Wesentliche Kombinationen. — Wesentlich unabhängige Th. Char. — Definition eines Systems von Th. Char. — Komplex der konjugierten Systeme. — Adjungierte Systeme. — Göpelsche Systeme.	
<b>§ 4. Die Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel</b> . . . . .	379
Ableitung der Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel aus der Formel (LVIII) pag. 91. — Folgerungen aus der gewonnenen Formel. — Historisches.	
<b>§ 5. Das Additionstheorem für die Quotienten der Funktionen <math>\vartheta[\varepsilon]_r(u)</math></b>	387
Ableitung des Additionstheorems der Thetaquotienten aus der Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel.	
<b>§ 6. Über die zwischen den <math>r^{2p}</math> Funktionen <math>\vartheta[\varepsilon]_r(u)</math> bestehenden Relationen</b> . . . . .	389
Thetapotenzen und vollständige Thetaprodukte. — Ableitung von Relationen zwischen denselben aus der Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel.	
<b>§ 7. Der besondere Fall <math>p = 1, r = 3</math></b> . . . . .	390
Charakteristikentheorie. — Die 9 Thetapotenzen und die 12 vollständigen Thetaprodukte. — Darstellung aller Funktionen durch 3 vollständige Thetaprodukte. — Relationen zwischen den Thetapotenzen. — Anwendung auf die Kurven 3. Ordnung. — Gleichung der Kurve bezogen auf ein Wendepunktdreieck. — Übergang von einem Wendepunktdreieck zu einem anderen. — Die Tetraedersubstitutionen. — Darstellung aller Funktionen durch 3 Thetapotenzen. — Gleichung der Kurve 3. Ordnung bezogen auf 3 Wendetangenten.	
<b>§ 8. Die elliptischen Normalkurven</b> . . . . .	399
Definition der elliptischen Normalkurven. — Ordnung. — Kollineationen in sich. — Geometrische Eigenschaften. — Die quadratischen Relationen zwischen den $x_i$ .	

	Seite
<b>§ 9. Übergang von den Funktionen <math>\vartheta[\varepsilon]_r(u)</math> zu den Funktionen <math>\vartheta[\varepsilon]_2(u)</math></b> . . . . .	404
Darstellung der zu $r > 2$ gehörigen vollständigen Thetaprodukte und Thetapotenzen durch die $2^{2p}$ Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_2(u)$ . — Darstellung von Thetafunktionen $r^{\text{ter}}$ Ordnung mit beliebiger halber Charakteristik durch die Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_2(u)$ .	
<b>§ 10. Die Transformation der Funktionen <math>\vartheta[\varepsilon]_2(u)</math></b> . . . . .	407
Zwei Methoden zur Lösung des Transformationsproblems der Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_2(u)$ . — Das spezielle Transformations- und das spezielle Teilungsproblem.	

### Dritter Teil.

#### Die speziellen Thetafunktionen.

##### Neuntes Kapitel.

##### Die Abelschen Thetafunktionen.

<b>§ 1. Vorbemerkungen aus der Theorie der Abelschen Funktionen</b> . . . . .	413
Normalintegrale I., II. und III. Gattung. — Abelsches Theorem. — Riemann-Rochscher Satz. — Funktion I. Gattung. — Punktsystem I. Gattung. — Vollständiges Punktsystem I. Gattung. — Restpunktsystem. — Korresiduale Punktsysteme. — Rang, Überschuß und Defekt eines Punktsystems erster Gattung.	
<b>§ 2. Die Riemannsche Thetafunktion</b> . . . . .	416
Definition der Funktion $\vartheta(u(o) - e)$ des Punktes $o$ der Riemannschen Fläche $T'$ . — Ihr Verhalten an den Querschnitten. — Bedingungen für die Modulen der Abelschen Thetafunktionen.	
<b>§ 3. Die Anzahl der Nullpunkte der Riemannschen Thetafunktion</b> . . . . .	419
Bestimmung der Anzahl der Nullpunkte von $\vartheta(u(o) - e)$ vermittelt eines über die ganze Begrenzung von $T'$ erstreckten Integrals.	
<b>§ 4. Zusammenhang zwischen den Parametern <math>e_1, \dots, e_p</math> und den Nullpunkten <math>\eta_1, \dots, \eta_p</math> der Riemannschen Thetafunktion</b> . . . . .	421
Ermittlung der Beziehung zwischen dem Parameter $e_\mu$ und der Summe der Werte des Integrals $u_\mu$ in den $p$ Nullpunkten von $\vartheta(u(o) - e)$ vermittelt eines über die ganze Begrenzung von $T'$ erstreckten Integrals. — Ausdehnung der Resultate des letzten und des gegenwärtigen Paragraphen auf eine Thetafunktion höherer Ordnung und auf die gemeinsamen Nullpunkte mehrerer Thetafunktionen.	
<b>§ 5. Die Lehre vom identischen Verschwinden der Riemannschen Thetafunktion</b> . . . . .	426
Hauptsatz, wonach $\vartheta\left(\left(\sum_1^{p-1} u(\varepsilon_x) + k\right)\right) = 0$ ist für alle Lagen der $p - 1$ Punkte $\varepsilon$ . — Hinreichende Bedingung für das Auftreten einer identisch verschwindenden Thetafunktion. — Nachweis, daß die	

gefundene Bedingung auch notwendig ist. — Identisches Verschwinden der partiellen Derivierten der Thetafunktion. — Endresultat.

- § 6. Zuordnung von Wurzelfunktionen zu den Thetafunktionen . . . . .** 436  
 Hilfssätze, die Darstellung von Größensystemen durch Integralsummen betr. — Zuordnung einer in den  $p$  Nullpunkten der Thetafunktion  $0^2$  werdenden Funktion  $\psi_g$  zu jeder der  $2^{2p}$  Thetafunktionen und zwar einer in einen Linearfaktor und eine  $\varphi$ -Funktion zerfallenden zu jeder der ungeraden, einer nichtzerfallenden zu jeder der geraden Thetafunktionen. — Zuordnung der  $2^{2p}$  Wurzelfunktionen  $\sqrt{\psi_g}$  zu den  $2^{2p}$  Thetafunktionen ohne Benutzung der Nullpunkte.
- § 7. Das Umkehrproblem . . . . .** 441  
 Die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems.

Zehntes Kapitel.

Die hyperelliptischen Thetafunktionen.

- § 1. Beziehungen der Periodizitätsmodulen eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung zu seinen Werten in den Verzweigungspunkten . . . . .** 445  
 Zugrundelegung eines speziellen Querschnittsystems der Riemannschen Fläche  $T'$ . — Ausdrücke der Periodizitätsmodulen eines Integrals erster Gattung an den Querschnitten durch seine Werte in den Verzweigungspunkten. — Werte des Systems der  $p$  Riemannschen Normalintegrale von einem Verzweigungspunkte zu den  $2p + 1$  anderen erstreckt. — Auftreten eines F. S. von Per. Char. — Änderung des Querschnittsystems.
- § 2. Berechnung der Riemannschen Konstanten  $k_1, \dots, k_p$  . . . . .** 449  
 Neumannsche Methode. — Christoffelsche Methode.
- § 3. Das Verschwinden der hyperelliptischen Thetafunktion . . . . .** 454  
 Anwendung der Sätze des § 5 des neunten Kapitels auf die hyperelliptischen Thetafunktionen. — Notwendige und hinreichende Bedingung für das identische Verschwinden der hyperelliptischen Thetafunktionen. — Folgerungen.
- § 4. Die zwischen den Modulen einer hyperelliptischen Thetafunktion bestehenden Beziehungen. Prymsche Methode zur Bestimmung der Riemannschen Konstanten  $k_1, \dots, k_p$ . . . . .** 456  
 Nachweis, daß  $k_1, \dots, k_p$  ein System korrespondierender Halber der Periodizitätsmodulen. — Verschwinden gewisser Thetafunktionen und ihrer Derivierten für die Nullwerte der Argumente. — Prymsche Bestimmung der Riemannschen Konstanten  $k_1, \dots, k_p$ . — Verschwinden gewisser gerader Funktionen für die Nullwerte der Argumente als Bedingungen für die Modulen der hyperelliptischen Thetafunktionen. — Anzahl der gefundenen Bedingungen. — Reduktion der 10 im Falle  $p = 4$  gefundenen auf 3. — Historisches.
- § 5. Das Additionstheorem der hyperelliptischen Thetafunktionen . . . . .** 464  
 Ableitung eines Additionstheorems für die hyperelliptischen Thetafunktionen aus der Formel (XLII) pag. 309. — Folgerungen.

## Elftes Kapitel.

Die reduzierbaren Abelschen Integrale und die  
zugehörigen Thetafunktionen.

	Seite
<b>§ 1. Reduktion Abelscher Integrale auf elliptische . . . . .</b>	<b>469</b>
<p>Notwendige und hinreichende Bedingung für die Periodizitätsmodulen eines auf ein elliptisches Integral reduzierbaren Abelschen Integrals von beliebigem Geschlecht <math>p</math>. — Transformation dieser auf eine einfachste Form. — Kanonische Form für die Periodizitätsmodulen eines reduzierbaren Integrals. — Zerfallen der zugehörigen Thetafunktion. — Historisches. — Reduktion des hyperelliptischen Integrals 1. Ordg. auf ein elliptisches durch eine Substitution 2<sup>ten</sup>, 3<sup>ten</sup> und 4<sup>ten</sup> Grads. Reduktion binomischer Integrale auf elliptische.</p>	
<b>§ 2. Spezielle Diskussion des Falles <math>p = 2</math> . . . . .</b>	<b>483</b>
<p>Notwendige und hinreichende Bedingung für die Thetamodulen beim Vorhandensein eines reduzierbaren Integrals der Klasse. — Existenz eines zweiten reduzierbaren Integrals. — Bedingung für das Auftreten unendlich vieler reduzierbarer Integrale. — Verallgemeinerung dieses Satzes für beliebiges <math>p</math>. — Übergang zu dem algebraischen Gebilde. — Die Bedingung für die Rosenhainschen Modulen <math>\kappa, \lambda, \mu</math> und die Verzweigungspunkte in den Fällen <math>k = 2</math> und <math>4</math>.</p>	
<b>§ 3. Reduktion Abelscher Integrale vom Geschlecht <math>q</math> auf solche niedrigeren Geschlechts <math>p</math> . . . . .</b>	<b>493</b>
<p>Existenz von <math>p</math> reduzierbaren Integralen, sobald eines vorhanden ist. — Bedingung für ihre <math>2pq</math> Periodizitätsmodulen. — Transformation dieser auf eine einfachste Form. — Kanonische Form für die Periodizitätsmodulen der <math>p</math> reduzierbaren Integrale. — Existenz von <math>q - p</math> weiteren auf solche vom Geschlecht <math>q - p</math> reduzierbaren Integralen der Klasse. — Zerfallen der zugehörigen Thetafunktionen. — Anwendung auf die allgemeinen Thetafunktionen. Der Satz von Wirtinger.</p>	
—————	
Autorenregister . . . . .	502
Sachregister . . . . .	504