

MATHÉMATIQUES

*Analyse fonctionnelle  
appliquée*

TOME I

JEAN-PIERRE AUBIN

*Université de Paris-Dauphine  
Ecole Polytechnique*



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

# SOMMAIRE

## TOME 1

PRÉFACE .....	11
CHAPITRE PREMIER / <i>Le théorème des projecteurs</i> .....	15
1.1 / Définition des espaces de Hilbert .....	16
1.2 / Rappels sur les opérateurs linéaires et bilinéaires continus .....	21
1.3 / Prolongement par densité des opérateurs linéaires et bilinéaires continus .....	25
1.4 / Théorème de meilleure approximation .....	28
1.5 / Projecteurs orthogonaux .....	30
1.6 / Sous-espaces fermés, espaces quotients et produits finis d'espaces de Hilbert .....	35
**1.7 / Bases orthogonales d'un espace de Hilbert séparable .....	36
CHAPITRE II / <i>Les théorèmes de prolongement et de séparation</i> ....	41
2.1 / Prolongement des opérateurs linéaires et bilinéaires continus .....	42
2.2 / Critère de densité .....	44
2.3 / Théorèmes de séparation .....	44
2.4 / Théorème de séparation dans les espaces de dimension finie	46
2.5 / Fonctions d'appui .....	47
*2.6 / Théorème de dualité en optimisation convexe .....	49
*2.7 / Théorème du minimax de von Neumann .....	54
*2.8 / Caractérisation des optimums de Pareto .....	61
CHAPITRE III / <i>Espaces duals et opérateurs transposés</i> .....	65
3.1 / Dual d'un espace de Hilbert .....	67
3.2 / Réalisation du dual d'un espace de Hilbert .....	71

3.3 / Transposition d'opérateurs .....	76
3.4 / Transposition d'opérateurs injectifs .....	77
3.5 / Duals de produits finis, d'espaces quotients et de sous-espaces fermés ou denses .....	81
3.6 / Le théorème de Lax-Milgram .....	85
**3.7 / Inéquations variationnelles .....	86
*3.8 / Équilibres non coopératifs de jeux quadratiques à $n$ personnes .....	88
CHAPITRE IV / <i>Les théorèmes de Banach et de Banach-Steinhaus</i> .....	91
4.1 / Propriétés des ensembles bornés d'opérateurs .....	92
*4.2 / Théorème de la moyenne ergodique .....	98
4.3 / Le théorème de Banach .....	101
4.4 / Théorème de l'image fermée .....	105
4.5 / Caractérisation des opérateurs inversibles à gauche .....	106
4.6 / Caractérisation des opérateurs inversibles à droite .....	109
*4.7 / Programmation quadratique sous contraintes linéaires .....	113
CHAPITRE V / <i>Construction d'espaces de Hilbert</i> .....	117
5.1 / Produit scalaire initial .....	119
5.2 / Produit scalaire final .....	121
5.3 / Sous-espaces normaux d'un espace pivot .....	122
5.4 / Domaine minimal et maximal d'une famille fermée d'opérateurs .....	124
**5.5 / Opérateurs non bornés et leurs adjoints .....	128
**5.6 / Complété d'un espace préhilbertien dans un autre .....	132
**5.7 / Espaces préhilbertiens non séparés .....	133
**5.8 / Somme hilbertienne d'espaces de Hilbert .....	134
**5.9 / Noyaux reproduisants d'un espace hilbertien de fonctions .....	137
CHAPITRE VI / <i>Espaces <math>L^2</math> et opérateurs de convolution</i> .....	142
6.1 / L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommables .....	144
6.2 / Les espaces $L^2(\Omega, a)$ avec poids .....	147
6.3 / Les espaces $\hat{H}^s$ .....	149
6.4 / Produit de convolution des fonctions de $C_0(\mathbf{R}^n)$ et de $L^1(\mathbf{R}^n)$ .....	151
6.5 / Opérateurs de convolution .....	156
6.6 / Approximation par convolution .....	157

**6.7 / Exemple : puissances de convolution de fonctions caractéristiques .....	159
*6.8 / Exemple : produit de convolution par des polynômes. Polynômes d'Appell .....	163
CHAPITRE VII / <i>Espaces de Sobolev de fonctions d'une variable ...</i>	169
7.1 / L'espace $H_0^m(\Omega)$ et son dual $H^{-m}(\Omega)$ .....	171
7.2 / Définition des distributions .....	172
7.3 / Dérivation des distributions .....	174
7.4 / Relations entre $H_0^m(\Omega)$ et $H_0^m(\mathbf{R})$ .....	178
7.5 / L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ .....	180
7.6 / Relations entre $H_0^m(\Omega)$ et $H^m(\mathbf{R})$ .....	184
**7.7 / Caractérisation du dual de $H^m(\Omega)$ .....	187
7.8 / Théorème de traces .....	188
7.9 / Convolution des distributions .....	190
CHAPITRE VIII / <i>*Quelques méthodes d'approximation des fonctions</i>	193
8.1 / Approximation par les polynômes orthogonaux .....	194
8.2 / Polynômes de Legendre, de Laguerre et de Hermite .....	196
8.3 / Séries de Fourier .....	200
8.4 / Approximation par les fonctions en escalier .....	202
8.5 / Approximation par des fonctions polynomiales par morceaux .....	205
8.6 / Approximation dans les espaces de Sobolev .....	210
CHAPITRE IX / <i>Espaces de Sobolev de fonctions de plusieurs variables et transformation de Fourier</i> .....	215
9.1 / Les espaces de Sobolev $H_0^m(\Omega)$ , $H^m(\Omega)$ et $H^{-m}(\Omega)$ .....	216
9.2 / Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide .....	219
9.3 / Transformation de Fourier des espaces de Sobolev .....	225
9.4 / Théorème de trace pour les espaces $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ .....	228
9.5 / Théorème de trace pour les espaces $H^m(\Omega)$ .....	236
9.6 / Théorème de compacité .....	240