

TABLE DES MATIÈRES

Préface par Pierre Colmez : La courbe de Fargues et Fontaine	1
1. L'anneau \mathbf{B}_e	1
1.1. \mathbf{B}_e est principal!	1
1.2. Anneaux de Fontaine	2
1.3. Questions sur \mathbf{B}_e	3
1.4. La courbe	5
2. Représentations de G_K et objets dérivés	8
2.1. Les conjectures	8
2.2. Le lemme fondamental	11
2.3. Les Espaces de Banach de Dimension finie	14
2.4. Les presque C -représentations	19
2.5. Les (φ, Γ) -modules sur l'anneau de Robba	22
3. Les courbes X_E, Y_E et les espaces analytiques associés	29
3.1. L'anneau A_E	30
3.2. La courbe algébrique X_E	33
3.3. La courbe analytique Y_E^{ad} et son quotient X_E^{ad}	35
4. Fibrés sur X_E	37
4.1. Modifications de fibrés	37
4.2. Le fibré $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$	37
4.3. Classification des fibrés sur X_E	38
4.4. Fibrés et φ -modules	38
5. Fibrés G_K -équivariants et représentations de G_K	40
5.1. Fibrés G_K -équivariants et (G_K, B) -paires	40
5.2. (φ, N) -modules et fibrés G_K -équivariants	41
5.3. Le théorème de monodromie p -adique	43
5.4. Descente à une extension de type de Lie	44
Bibliographie de la préface	47
Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique	51
Leitfaden	53
1. Fonctions holomorphes de la variable p et anneaux de périodes	55
Introduction	55

1.1. Hypothèses et notations	56
1.2. \mathcal{O}_E -vecteurs de Witt	56
1.2.1. Le cas « classique » ([16])	57
1.2.2. Le cas « tordu » : déformation du relèvement de Teichmüller ...	60
1.3. Les anneaux \mathcal{E} , B^b et $B^{b,+}$	62
1.4. Normes de Gauss	64
1.4.1. Définition et premières propriétés	64
1.4.2. Multiplicativité	67
1.4.3. Topologie définie par les normes de Gauss sur \mathbf{A}	68
1.5. Polygones de Newton des éléments de B^b	69
1.5.1. Transformée de Legendre	69
1.5.2. Polygone de Newton	70
1.6. Les algèbres de Fréchet B_I	71
1.6.1. Définition et premières propriétés	71
1.6.2. Changement du corps E	74
1.6.3. Polygone de Newton des éléments de B_I	74
1.6.4. Le cas particulier où $0 \in I$	78
1.6.5. Caractérisation des éléments inversibles de B_I en termes de polygone de Newton	79
1.7. Les cas $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$ et F maximale complet	81
1.7.1. Le cas $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$	81
1.7.2. Interprétation comme perfectisé d'anneaux de fonctions holomorphes de la variable $[\pi_F]$, le cas $\varphi(X) = X^q$	83
1.7.3. Interprétation comme perfectisé d'anneaux de fonctions holomorphes de la variable $[\pi_F]$, le cas $\varphi(X) = (1 + X)^q - 1$	85
1.7.4. Interprétation de la symétrie entre E et F	85
1.7.5. Le cas maximale complet	87
1.8. Le corps valué hensélien \mathcal{E}^\dagger et l'anneau de Robba	87
1.9. Extension des fonctions holomorphes au bord	89
1.10. L'anneau B^+	92
1.10.1. Définition et premières propriétés	92
1.10.2. Les bivecteurs	94
1.10.3. Lien avec les anneaux de périodes cristallines	96
1.10.4. L'anneau \overline{B}	97
2. Zéros des fonctions holomorphes : le cas F algébriquement clos	99
Introduction	99
2.1. L'anneau A^b et le morphisme θ	100
2.1.1. Généralités	100
2.1.2. Le morphisme θ	102
2.1.3. Le cas de l'anneau des entiers d'un corps p -adique	105
2.2. Étude de certains idéaux et valuations des vecteurs de Witt	106
2.2.1. Éléments primitifs	106

2.2.2. Idéaux de \mathbf{A} engendrés par un élément de degré 1	106
2.3. L'espace Y des idéaux de degré 1 des vecteurs de Witt	116
2.3.1. Définition et structure métrique	116
2.3.2. Paramétrisation par les points d'un groupe de Lubin-Tate à valeurs dans \mathcal{O}_F	118
2.3.3. Point de vue de Berkovich	121
2.3.4. Effet d'un changement du corps E	122
2.4. Factorisation de Weierstrass des éléments primitifs de degré > 1	123
2.4.1. Zéros des éléments de B_I	126
2.5. Les B_I sont principaux pour une couronne compacte	128
2.6. Factorisation de Weierstrass au voisinage de 0	129
2.7. Diviseur d'une fonction holomorphe	130
2.7.1. L'anneau B_{dR}^+ associés à un point de Y	130
2.7.2. L'application diviseur	131
3. Zéros des fonctions holomorphes : le cas F parfait quelconque	133
Introduction	133
3.1. Étude de l'ensemble $ Y_F $ par descente galoisienne	133
3.1.1. Un calcul de cohomologie galoisienne	133
3.1.2. Description de l'ensemble $ Y_F $ par descente galoisienne	135
3.1.3. Corps résiduels	136
3.2. Le théorème de presque pureté	139
3.3. En résumé	140
3.4. Zéros des fonctions holomorphes	141
3.4.1. Extension à B_I de l'application d'évaluation en un point	141
3.4.2. Zéros et polygones de Newton	142
3.4.3. Produits de Weierstrass	143
3.5. Diviseurs et idéaux	144
3.5.1. Les B_I sont principaux pour I compact	144
3.5.2. Diviseurs positifs et idéaux fermés	145
3.5.3. L'anneau de Robba est de Bezout	146
3.5.4. Fonctions méromorphes et leurs diviseurs	146
3.6. Calcul des invariants sous Galois de $B_{\widehat{F}}$	147
4. \mathbb{Q}_p-espaces vectoriels formels et périodes des groupes p-divisibles	149
Introduction	149
4.1. Les E -espaces de Banach $B^{\varphi^h = \pi^d}$	150
4.1.1. Quelques calculs préliminaires	150
4.1.2. Structure d'espace de Banach sur $B^{\varphi^h = \pi^d}$	151
4.1.3. Description via l'anneau \overline{B}	152
4.1.4. Changement d'uniformisante	152
4.1.5. Changement de corps E	152
4.2. L'espace de Banach $B^{\varphi^h = \pi^d}$ vit dans les bivecteurs lorsque $d \leq h$...	153

4.3. \mathcal{O} -modules π -divisibles	155
4.3.1. Généralités et théorie de Dieudonné	155
4.3.2. Exemple	156
4.3.3. Quasi-logarithmes et leur interprétation rigide analytique	160
4.4. Description de $B^{\varphi^h=\pi^d}$ en termes de \mathcal{O} -modules π -divisibles lorsque $d \leq h$	163
4.5. Lien avec l'application des périodes d'un groupe p -divisible	168
4.5.1. Un résultat de relèvement	168
4.5.2. Interprétation de l'isomorphisme $\mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} B^{\varphi^h=\pi^d}$ en termes de quasi-logarithmes	169
4.5.3. Application des périodes	174
4.6. Espaces vectoriels formels et spectraux	178
4.6.1. E -espaces vectoriels formels	178
4.6.2. E -espace vectoriel formel associé à un \mathcal{O} -module formel π -divisible en caractéristique positive	179
4.6.3. Relèvement canonique en caractéristique 0	180
4.6.4. Espace vectoriel formel associé à un \mathcal{O} -module formel π -divisible en inégales caractéristiques	181
4.6.5. Espaces spectraux	183
4.6.6. Espaces de Banach spectraux associés aux espaces vectoriels formels	192
4.6.7. Interprétation géométrique de l'application des périodes	193
5. Courbes	197
Introduction	197
5.1. Généralités	197
5.2. Construction de courbes	199
5.2.1. Anneaux presque euclidiens	199
5.2.2. Construction de courbes affines	200
5.2.3. Construction de courbes complètes	201
5.3. Fibrés vectoriels sur les courbes	204
5.3.1. Classification par recollement	204
5.3.2. Opérations sur les fibrés en termes de données de recollement ..	205
5.4. Sur quelques courbes particulières	205
5.5. Filtrations de Harder-Narasimhan	207
5.5.1. Formalisme général	207
5.5.2. Exemples	209
5.6. Classification de fibrés	215
5.6.1. Classification des fibrés sur les sphères de Riemann	215
5.6.2. Une remarque sur les fibrés de rang 2	217
5.6.3. Opérations sur les fibrés	219
5.6.4. Classification des fibrés sur les sphères de Riemann généralisées	224

6. La courbe fondamentale lorsque F est algébriquement clos	237
Introduction	237
6.1. L'algèbre graduée $P_{F,E,\pi}$: définition et généralités	237
6.1.1. Définition	237
6.1.2. Changement d'uniformisante	238
6.1.3. Changement de corps E	238
6.2. L'algèbre P est graduée factorielle	238
6.2.1. Énoncé du théorème	238
6.2.2. Diviseurs sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$	239
6.2.3. Surjectivité de l'application diviseur : produits de Weierstraß ..	241
6.3. Produits de Weierstraß associés aux éléments de degré 1 et logarithme	244
6.4. La suite exacte fondamentale	246
6.5. La courbe lorsque F est algébriquement clos	248
6.5.1. Définition et théorème principal	248
6.6. Description en termes des fonctions méromorphes sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$	250
6.7. La courbe comme quotient d'un ind-schéma	251
7. La courbe fondamentale pour F parfait quelconque	253
Introduction	253
7.1. Calculs de cohomologie galoisienne	253
7.1.1. Cohomologie galoisienne de B_{dR}^+	253
7.1.2. Cohomologie galoisienne de B_e	254
7.2. L'anneau B_e est de Dedekind	256
7.3. La courbe	258
7.4. Description en termes de fonctions méromorphes sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$	260
7.5. Changement de corps E	260
7.6. Changement de corps F	261
7.7. La courbe associée à \overline{F}	262
7.8. Choix d'un fibré ample et φ -modules de rang un sur B	263
7.9. Retrouver la courbe analytique à partir de la courbe schématique : le théorème de Runge	266
8. Classification des fibrés vectoriels : le cas F algébriquement clos	269
Introduction	269
8.1. Deux résultats sur les périodes des groupes p -divisibles	269
8.1.1. Le cas de l'espace de Lubin-Tate	270
8.1.2. Le cas de l'espace de Drinfeld	271
8.2. Fibrés vectoriels	274
8.2.1. Fibrés en droites	274
8.2.2. Fibrés de rang supérieur : définitions et premières propriétés ...	277
8.2.3. Lien avec les isocristaux	278
8.2.4. Classification des fibrés : énoncé du théorème	280

8.3. Preuve du théorème de classification via les périodes des groupes p -divisibles	280
8.3.1. Modifications de fibrés associées aux groupes p -divisibles	280
8.3.2. Preuve du théorème	282
8.3.3. Interprétation en termes de périodes de Hodge-Tate et de l'isomorphisme entre les deux tours	285
8.4. Preuve via les espaces de Banach-Colmez	286
8.4.1. Espaces de Banach-Colmez	286
8.4.2. Preuve du théorème 8.2.10	288
8.5. Classification des fibrés sur \overline{E}	288
8.6. Simple connexité géométrique de la courbe	289
9. Classification des fibrés : le cas F parfait	291
Introduction	291
9.1. Fibrés équivariants	291
9.1.1. Définition	291
9.1.2. Deux critères simples de continuité de l'action	293
9.1.3. Équivariance de la filtration de Harder-Narasimhan	294
9.1.4. Torsion par un 1-cocycle	295
9.2. Classification des fibrés équivariants semi-stables lorsque F est algébriquement clos	295
9.2.1. Extensions équivariantes	296
9.3. Descente galoisienne	297
9.4. Classification des fibrés	300
9.5. Calcul du groupe fondamental de la courbe	301
10. Faiblement admissible implique admissible et le théorème de la monodromie p-adique	303
Introduction	303
10.1. Fibrés G_K -équivariants	304
10.1.1. Action du groupe de Galois G_K sur la courbe	304
10.1.2. Fibrés équivariants et B_e -représentations	305
10.1.3. Descente à une extension arithmétiquement profinie	305
10.1.4. Classification des fibrés semi-stables équivariants	306
10.2. Fibrés équivariants cristallins	306
10.2.1. Fibrés équivariants associés aux isocristaux	306
10.2.2. Fibrés équivariants plats	307
10.2.3. Quelques calculs d'invariants sous Galois	309
10.2.4. Fibrés équivariants plats sur $Y \setminus V(t)$	310
10.2.5. Fibrés équivariants cristallins	311
10.3. Fibrés log-cristallins	314
10.3.1. L'anneau B_{\log}	314
10.3.2. Fibré équivariant associé à un (φ, N) -module	315

10.3.3. Description en termes de la surface X_{\log}	318
10.3.4. Description en termes de B -paires	319
10.3.5. Fibrés log-cristallins	322
10.4. Fibrés équivariants de de Rham	323
10.4.1. B_{dR}^+ -représentations génériquement plates	323
10.4.2. Fibrés de de Rham	326
10.5. Faiblement admissible implique admissible	326
10.5.1. Rappels sur les φ -modules filtrés	326
10.5.2. Classification des fibrés cristallins en termes de φ -modules filtrés	327
10.5.3. Faiblement admissible implique admissible	328
10.6. de Rham implique potentiellement log-cristallin	329
10.6.1. Fibrés log-cristallins et φ -modules filtrés	329
10.6.2. Fibrés potentiellement log-cristallins	330
10.6.3. Énoncé du théorème	331
10.6.4. Le cas semi-stable	332
10.6.5. Dévissage à un énoncé de cohomologie galoisienne	333
11. φ-modules et fibrés	343
Introduction	343
11.1. φ -modules sur B^+	343
11.1.1. Définitions	343
11.1.2. Module gradué associé à un φ -module	345
11.1.3. Changement de corps E	345
11.1.4. Les φ -modules $A(\lambda)$	347
11.1.5. Classification des φ -modules	347
11.1.6. φ -modules sur B^+ et fibrés	353
11.1.7. Variante : φ -modules sur B_{ρ}^+ et F -isocristaux	355
11.2. φ -modules sur B et l'anneau de Robba d'après Kedlaya	357
11.2.1. Définitions et premières propriétés	357
11.2.2. Propriété de faisceau de $I \mapsto B_I$	358
11.2.3. Recollement de fibrés	359
11.2.4. Descente galoisienne	362
11.2.5. Fibrés φ -équivariants	364
11.3. GAGA d'après Kedlaya-Liu	367
11.4. En résumé	370
11.5. Le théorème de Berger	371
Bibliographie	373
Index	379
Index terminologique	381