

## INHALTSVERZEICHNIS

I. Gegenstand und Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik . . . . .	15
II. Zufällige Ereignisse . . . . .	24
§ 1. Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit . . . . .	24
2.1.1. Versuch. Ereignisfeld. Verknüpfung von Ereignissen . . . . .	24
2.1.2. Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit . . . . .	29
2.1.3. Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	32
2.1.4. Stichproben ohne Zurücklegen. Zufallszahlen . . . . .	39
§ 2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	42
2.2.1. Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit. . . . .	42
2.2.2. Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten. Der Multiplikationssatz und der allgemeine Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten . . . . .	46
2.2.3. Unabhängige Ereignisse. Der Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse . . . . .	50
2.2.4. Die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit . . . . .	52
2.2.5. Die Formel für die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen (Bayessche Formel) . . . . .	53
§ 3. Vereinigung von Versuchen . . . . .	54
2.3.1. Definition der Vereinigung von Versuchen. Unabhängige Versuche . . . . .	54
2.3.2. Einige Grundbegriffe der Informationstheorie. Entropie. Kodierungsproblem . . . . .	56
2.3.3. Die Binomialverteilung . . . . .	65
2.3.4. Noch einmal zum Schema unabhängiger Versuche. Zuverlässigkeit eines Systems . . . . .	69
III. Zufallsgrößen . . . . .	75
§ 1. Diskrete Zufallsgrößen . . . . .	75
3.1.1. Die Verteilung einer diskreten Zufallsgröße . . . . .	75
3.1.2. Mittelwert und Erwartungswert. Häufigster Wert . . . . .	80
3.1.3. Zentrale Momente. Streuung und Standardabweichung. Variationskoeffizient. Durchschnittliche Abweichung. Schiefe und Exzeß . . . . .	85
3.1.4. Die Binomialverteilung. Die momenterzeugende Funktion einer diskreten Verteilung . . . . .	92
3.1.5. Die hypergeometrische Verteilung . . . . .	98
3.1.6. Die Poissonsche Verteilung . . . . .	100
3.1.7. Die Poissonsche Verteilung im Schema unabhängiger Versuche mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten und ihre Anwendung in der Zuverlässigkeitstheorie . . . . .	104
§ 2. Die Verteilung stetiger Zufallsgrößen . . . . .	106
3.2.1. Verteilungsdichte und Verteilungsfunktion. Quantile. Median . . . . .	106
3.2.2. Die Momente einer stetigen Verteilung. Erwartungswert und Streuung. Modalwert . . . . .	113
3.2.3. Die empirische Verteilung einer stetigen Zufallsgröße. Klasseneinteilung der Meßwerte. Strichliste. Häufigkeitspolygon. Histogramm. Empirische Kennzahlen . . . . .	116
3.2.4. Die Zuverlässigkeit eines Elements in einem System als Funktion der Zeit . . . . .	125

IV. Die Normalverteilung . . . . .	128
§ 1. Eigenschaften der Normalverteilung . . . . .	128
4.1.1. Die Verteilungsdichte und die Parameter der Normalverteilung . . . . .	128
4.1.2. Erzeugende Funktion, Momente, Schiefe und Exzeß normalverteilter Zufallsgrößen . . . . .	136
§ 2. Die Funktion $\Phi_0(z)$ und die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für normalverteilte Zufallsgrößen . . . . .	138
4.2.1. Die Funktion $\Phi_0(z)$ . . . . .	138
§ 3. Anwendung der Normalverteilung bei der Schätzung von Wahrscheinlichkeiten und bei der Prüfung von Hypothesen . . . . .	141
4.3.1. Die Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung. Der Satz von JAKOB BERNOULLI. Der Satz von LAPLACE . . . . .	141
4.3.2. Konfidenzintervalle für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit . . . . .	148
4.3.3. Konfidenzintervalle für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit bei kleinen Stichproben . . . . .	152
V. Mehrdimensionale Verteilungen. Das Gesetz der großen Zahlen und der zentrale Grenzwertsatz . . . . .	156
§ 1. Zweidimensionale Verteilungen . . . . .	156
5.1.1. Zweidimensionale Verteilungen und bedingte Verteilungen . . . . .	156
5.1.2. Unabhängigkeit von Zufallsgrößen . . . . .	165
§ 2. Die Kenngrößen mehrdimensionaler Verteilungen . . . . .	166
5.2.1. Erwartungswert einer Funktion von mehreren Zufallsgrößen . . . . .	166
5.2.2. Kovarianz und Korrelationskoeffizient. Die Streuung einer Summe . . . . .	169
5.2.3. Angenäherte Bestimmung des Erwartungswertes und der Streuung einer Funktion mehrerer Zufallsgrößen . . . . .	174
5.2.4. Die zweidimensionale Normalverteilung . . . . .	176
5.2.5. Das Hyperbelnavigationsverfahren . . . . .	180
§ 3. Das Gesetz der großen Zahlen . . . . .	183
5.3.1. Die Tschebyscheffsche Ungleichung . . . . .	183
5.3.2. Das Gesetz der großen Zahlen . . . . .	185
§ 4. Die Faltung von Verteilungen. Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .	188
5.4.1. Der Begriff der Faltung . . . . .	188
5.4.2. Die erzeugende Funktion einer Faltung. Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .	192
5.4.3. Die Rolle der Normalverteilung in den Anwendungen . . . . .	197
VI. Schätzen von Parametern . . . . .	199
§ 1. Grundbegriffe der Stichprobenmethode und die Aufgaben der mathematischen Statistik . . . . .	199
6.1.1. Der Begriff der Stichprobe . . . . .	199
6.1.2. Die Verteilung der Stichprobe und Stichprobenfunktionen. Konsistente und erwartungstreue Schätzungen. Eine erwartungstreue Schätzung der Streuung. . . . .	200
6.1.3. Der Hauptsatz der mathematischen Statistik . . . . .	204
§ 2. Statistische Schätzungen der Verteilungsparameter bei großen Stichproben . . . . .	205
6.2.1. Bedeutung der Konsistenz, der Erwartungstreue und der Effektivität von Schätzungen . . . . .	205
6.2.2. Die asymptotische Verteilung der empirischen Kenngrößen . . . . .	207
6.2.3. Die Maximum-Likelihood-Methode zur Bestimmung von Parameterschätzungen. Die Momentenmethode . . . . .	209
6.2.4. Schätzung des Verteilungszentrums mit Hilfe von Beobachtungen verschiedener Genauigkeit . . . . .	213

§ 3. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen einiger empirischer Kenngrößen . . . . .	217
6.3.1. Die $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	217
6.3.2. Die Studentsche $t$ -Verteilung . . . . .	221
6.3.3. Die $F$ -Verteilung . . . . .	224
6.3.4. Die Verteilung der empirischen Streuung einer Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit . . . . .	225
6.3.5. Die Verteilung des $t$ -Quotienten . . . . .	228
§ 4. Schätzung der Verteilungsparameter an Hand kleiner Stichproben . . . . .	229
6.4.1. Der Begriff der Konfidenzschätzung. Konfidenzintervalle für das Verteilungszentrum $\mu$ bei bekanntem $\sigma$ . . . . .	229
6.4.2. Konfidenzintervalle für das Verteilungszentrum bei unbekanntem $\sigma$ . . . . .	232
6.4.3. Konfidenzintervalle für $\sigma$ . . . . .	234
6.4.4. Schätzung des Parameters $\sigma$ an Hand der Spannweiten unabhängiger Stichproben . . . . .	235
6.4.5. Konfidenzintervalle im Fall asymptotisch normalverteilter Schätzungen . . . . .	237
6.4.6. Toleranzbereiche . . . . .	238
6.4.7. Lebensdauerprüfung — Schätzung des Parameters $\lambda$ einer exponentialverteilten Grundgesamtheit . . . . .	240
<b>VII. Statistische Prüfung von Hypothesen . . . . .</b>	<b>245</b>
§ 1. Aufgabenstellung. Prüfung von Hypothesen über Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen und Mittelwerte . . . . .	245
7.1.1. Statistische Prüfung einer Hypothese über Wahrscheinlichkeiten . . . . .	245
7.1.2. Prüfen von Hypothesen. Allgemeine Aufgabenstellung. Hypothese über die Lage des Erwartungswerts . . . . .	248
7.1.3. Der Zeichentest . . . . .	255
7.1.4. Vergleich zweier Mittelwerte . . . . .	260
§ 2. Prüfen von Hypothesen über Streuungen . . . . .	263
7.2.1. Prüfen einer Hypothese über die Gleichheit zweier Streuungen ( $F$ -Test) . . . . .	263
7.2.2. Prüfen der Hypothese über die Gleichheit von mehreren Streuungen (Cochran-Test) . . . . .	265
§ 3. Prüfung von Hypothesen über das Verteilungsgesetz . . . . .	266
7.3.1. Der $\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	266
7.3.2. Prüfung der Hypothese auf Normalverteiltheit mit Hilfe von Schiefe und Exzeß . . . . .	273
7.3.3. Prüfen der Hypothese, daß zwei Stichproben ein und derselben Grundgesamtheit entstammen . . . . .	273
7.3.4. Der $\omega^2$ -Anpassungstest . . . . .	277
7.3.5. Ausreißertests . . . . .	280
7.3.6. Prüfen der Hypothese, daß Grundgesamtheiten normalverteilt sind, mittels mehrerer kleiner Stichproben . . . . .	283
<b>VIII. Abriß der Varianzanalyse . . . . .</b>	<b>288</b>
§ 1. Der Begriff der Varianzanalyse. Einfache Varianzanalyse . . . . .	288
8.1.1. Aufgaben der Varianzanalyse . . . . .	288
8.1.2. Die einfache Varianzanalyse . . . . .	288
§ 2. Mehrfache Varianzanalyse . . . . .	297
8.2.1. Die doppelte Varianzanalyse . . . . .	297
8.2.2. Beispiel einer doppelten Varianzanalyse . . . . .	300

IX. Abriß der Korrelationstheorie . . . . .	303
§ 1. Der Begriff der Korrelation und der Regression. . . . .	303
9.1.1. Stochastische Bindungen . . . . .	303
9.1.2. Regressionslinien. Bedingte Streuungen . . . . .	304
9.1.3. Korrelationskoeffizient und Regressionsgeraden. . . . .	306
9.1.4. Die lineare Korrelation . . . . .	310
9.1.5. Das Korrelationsverhältnis . . . . .	311
§ 2. Die Schätzung der Korrelationskenngrößen an Hand von Stichproben . . . . .	313
9.2.1. Die empirischen Kenngrößen einer stochastischen Bindung und ihre Berechnung . . . . .	313
9.2.2. Das empirische Korrelationsverhältnis . . . . .	319
9.2.3. Konfidenzschätzungen. . . . .	320
9.2.4. Prüfung der Hypothese $\rho = 0$ . . . . .	322
§ 3. Regressionsprobleme . . . . .	322
9.3.1. Die Aufgabenstellung . . . . .	322
9.3.2. Schätzung der Parameter mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate	324
9.3.3. Der allgemeine Fall der linearen Regression . . . . .	332
X. Berechnung, Untersuchung und Kontrolle der Genauigkeit mit Methoden der Wahr- scheinlichkeitsrechnung und Statistik . . . . .	335
§ 1. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Methode der Berechnung von Maßketten	335
10.1.1. Der Begriff der Maßkette . . . . .	335
10.1.2. Die Berechnung einer Maßkette . . . . .	336
§ 2. Statistische Methoden zur Untersuchung der Genauigkeit und der Stabilität technologischer Prozesse. . . . .	344
10.2.1. Die Untersuchung der Genauigkeit technologischer Prozesse . . . . .	344
10.2.2. Statistische Methoden zur Untersuchung der Stabilität eines techno- logischen Prozesses. . . . .	349
§ 3. Statistische Methoden der prophylaktischen Qualitätskontrolle . . . . .	353
10.3.1. Allgemeine Begriffe und Hauptaufgaben . . . . .	353
10.3.2. Einige Verfahren der statistischen Qualitätsregelung . . . . .	353
10.3.3. Über die Auswahl des Kontrollverfahrens und seiner Parameter . . . . .	357
§ 4. Statistische Methoden in der Eingangs- und Endkontrolle . . . . .	361
10.4.1. Grundbegriffe und Aufgabenstellung . . . . .	361
10.4.2. Einfache Stichprobe . . . . .	362
10.4.3. Einfache Stichprobenpläne mit der Annahmezahl $c = 0$ . . . . .	365
§ 5. Die Theorie der extremalen Stichprobenelemente und ihre Anwendung . . . . .	366
10.5.1. Die Theorie des „schwächsten Gliedes“ und die Verteilungsgesetze der extremalen Stichprobenelemente . . . . .	366
10.5.2. Die Anwendung des Verteilungsgesetzes $F_1(u)$ auf die Bestimmung der extremalen Abflußmengen von Flüssen . . . . .	372
10.5.3. Die statistische Deutung der Resultate von Dauerfestigkeitsprüfungen	382
XI. Grundbegriffe der Theorie der zufälligen Prozesse und einige Anwendungen . . . . .	388
§ 1. Zufällige Prozesse und ihre Kenngrößen . . . . .	388
11.1.1. Der Begriff des zufälligen Prozesses . . . . .	388
11.1.2. Erwartungswert, Streuung und Korrelationsfunktion eines zufälligen Prozesses . . . . .	390

§ 2. Einige Beispiele zufälliger Prozesse . . . . .	394
11.2.1. Poissonsche Prozesse . . . . .	394
11.2.2. Die Verteilung des Abstandes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen in einem Poissonschen Prozeß . . . . .	401
11.2.3. Markoffsche Prozesse . . . . .	402
11.2.4. Das Erlangsche Problem für ein endliches Bündel . . . . .	406
11.2.5. Statistisches Modell eines Staubeckens . . . . .	413
11.2.6. Stationäre zufällige Prozesse . . . . .	416
11.2.7. Bestimmung der „tragenden Länge“ von Profilschnitten . . . . .	418
§ 3. Einiges zur Statistik zufälliger Prozesse . . . . .	422
11.3.1. Bestimmung der statistischen Schätzwerte eines zufälligen Prozesses . . . . .	422
11.3.2. Bestimmung statistischer Schätzwerte für die Kenngrößen stationärer zufälliger Prozesse . . . . .	424

ANHANG

Tafel I.	Verteilungsdichte $\varphi(z)$ der normierten Normalverteilung . . . . .	426
Tafel II.	Die Funktion $\Phi_0(z)$ . . . . .	428
Tafel III.	Kennzahlen der Verteilung der Spannweite $R_n$ für Stichproben vom Umfang $n$ aus einer nach $N(\mu, \sigma^2)$ normalverteilten Grundgesamtheit (Erwartungswert, Standardabweichung und $p$ -Quantile $x_p$ ) . . . . .	430
Tafel IV.	Obere 100 $p$ -prozentige Werte $\chi_p^2$ der $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	432
Tafel V.	100 $p$ -prozentige Werte $t_{p,m}$ der Studentschen $t$ -Verteilung . . . . .	434
Tafel VI.	Obere fünfprozentige Werte $F_{0,05; m_1, m_2}$ und obere einprozentige Werte $F_{0,01; m_1, m_2}$ der $F$ -Verteilung . . . . .	435
Tafel VII.	Kritische Zahlen $\bar{m}_N$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,01; 0,05; 0,10$ und $0,25$ (Zeichentest) . . . . .	442
Tafel VIII.	Kritische Werte $g_\alpha$ der Größe $G_{\max}$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,01$ und $\alpha = 0,05$ (Cochran-Test) . . . . .	443
Tafel IX.	Werte der Koeffizienten der relativen Schiefe $\alpha$ und der relativen Streuung $k$ für verschiedene Verteilungsgesetze . . . . .	444
Tafel X.	Quantile der normierten doppelten Exponentialverteilung; $y$ in Abhängigkeit von bestimmten Werten von $\Psi(y) = e^{-e^{-y}}$ . . . . .	447
Tafel XI.	Poissonsche Verteilung $\pi_\lambda(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ und $\sum_{m=k}^{\infty} \pi_\lambda(m)$ . . . . .	458
Tafel XII.	Obere 100 $\alpha$ -prozentige Werte $v_{\alpha;n}$ der Verteilung der Zufallsgröße $T = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{s}$ bzw. $T = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{s}$ . . . . .	466
Erläuterungen zu den Tafeln . . . . .		467
Literaturverzeichnis . . . . .		471
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .		475