

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung: Die Geometrie, ein Spiel	9
1. Drei Problemkreise	9
2. Das Schachspiel	9
3. Die Grundforderungen	10
3.1. Unabhängigkeit	10
3.2. Vollständigkeit	10
3.3. Widerspruchsfreiheit	10
4. Axiomatik in der Geometrie	10
4.1. Das N-Modell in der euklidischen Geometrie, heteronome Axiomensysteme	10
4.2. Künstliche Geometrien, autonome Axiomensysteme	11
5. Ziel des vorliegenden Heftes	11
5.1. Inzidenzgeometrie	11
5.2. Heteronome oder autonome Axiomensysteme?	12
I. Affine Inzidenzgeometrie	13
1. Das Axiomensystem der affinen Inzidenzebene (Problemkreis A)	13
1.1. Grundelemente	13
1.2. Inzidenzstruktur	13
1.3. Axiomensystem	13
1.4. Widerspruchsfreiheit	14
1.5. Unabhängigkeit	16
1.6. Vollständigkeit	16
1.6.1. Der Satz von Desargues in der euklidischen Geometrie	17
1.6.2. Beweis des Satzes in der euklidischen Geometrie	18
1.6.3. Das „Moulton-Modell“	18
1.6.4. Der Satz von Desargues im „Moulton-Modell“	19
2. Die affine Inzidenzgeometrie (Problemkreis B)	20
2.1. Grundlegende Sätze	20
2.2. Minimalsätze	21
2.3. Sätze der <i>endlichen</i> affinen Inzidenzgeometrie	22
2.4. Abbildungen einer affinen Inzidenzebene	25
2.4.1. Verschiedene Arten von Abbildungen, Fixpunkt- und Fixgeraden- sätze	25
2.4.2. Bestimmbarkeit von Abbildungen	28
2.4.3. Gruppen von Abbildungen	30
2.4.4. Existenz von Abbildungen	33
3. Algebraische Modelle affiner Inzidenzgeometrien (Problemkreis C)	35
3.1. Modell über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen	35
3.1.1. Modellpunkte, Modellgeraden, Modellinzidenz	35
3.1.2. Gültigkeit der Axiome	36
3.1.3. Abbildungen im Modell	37
3.2. Endliche Körper	39

3.2.1.	Restklassenkörper modulo 2	39
3.2.2.	Restklassenkörper modulo 3	39
3.2.3.	Restklassenring modulo 4	40
3.2.4.	Restklassenkörper modulo p (p Primzahl)	40
3.3.	Modelle über Restklassenkörpern	41
3.3.1.	Modellpunkte, Modellgeraden, Modellinzidenz	41
3.3.2.	Gültigkeit der Axiome	43
3.3.3.	Abbildungen im Modell	45
3.4.	Modell über einem beliebigen Körper K	53
II. Projektive Inzidenzgeometrie		56
1.	Das Axiomensystem der projektiven Inzidenzebene (Problemkreis A)	56
1.1.	Unendlich ferne Elemente	56
1.2.	Inzidenzstruktur	56
1.3.	Axiomensystem	56
1.4.	Widerspruchsfreiheit	57
1.5.	Unabhängigkeit	59
1.6.	Vollständigkeit	59
1.6.1.	Der Satz von Desargues	59
1.6.2.	Das erweiterte „Moulton-Modell“	60
1.6.3.	Der Satz von Desargues im erweiterten „Moulton-Modell“	60
2.	Die projektive Inzidenzgeometrie (Problemkreis B)	60
2.1.	Grundlegende Sätze	60
2.2.	Minimalsätze	61
2.3.	Sätze der <i>endlichen</i> projektiven Inzidenzgeometrie	63
2.4.	Abbildungen einer projektiven Inzidenzebene	65
2.4.1.	Verschiedene Arten von Abbildungen, Fixpunkt- und Fixgeraden- sätze	65
2.4.2.	Bestimmbarkeit von Abbildungen	68
2.4.3.	Gruppen von Abbildungen	70
2.4.4.	Existenz von Abbildungen	72
3.	Zusammenhänge zwischen der affinen und der projektiven Inzidenzebene	75
3.1.	Durch <i>Adjunktion</i> von der affinen zur projektiven Inzidenzebene	75
3.2.	Durch <i>Schlitzen</i> von der projektiven zur affinen Inzidenzebene	75
4.	Algebraische Modelle projektiver Inzidenzgeometrien (Problemkreis C)	77
4.1.	Modell über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen	77
4.1.1.	Modellpunkte, Modellgeraden, Modellinzidenz	77
4.1.2.	Gültigkeit der Axiome	78
4.1.3.	Abbildungen im Modell	79
4.2.	Modelle über Restklassenkörpern	82
4.2.1.	Modellpunkte, Modellgeraden, Modellinzidenz	82
4.2.2.	Gültigkeit der Axiome	84
4.2.3.	Abbildungen im Modell	86
4.3.	Modell über einem beliebigen Körper K	96
III. Vertiefungen und Erweiterungen		98
1.	Ovale in endlichen Inzidenzebenen	98
1.1.	Definitionen	99

1.2.	Sätze über Ovale	100
1.3.	Anzahlaussagen in Bezug auf ein Oval	101
1.3.1.	Anzahl der Geraden einzelner Geradenklassen	101
1.3.2.	Anzahl der Punkte einzelner Punktklassen	102
1.3.3.	Anzahl der Geraden verschiedener Klassen, die mit einem Punkt inzidieren	102
1.3.4.	Anzahl der Punkte verschiedener Klassen, die mit einer Geraden inzidieren	103
1.4.	Ovale in der projektiven Inzidenzebene mit $n = 2$	105
1.4.1.	Anzahl der Ovale	105
1.4.2.	Ovale im geometrischen Modell der Figur II, 17	105
1.4.3.	Ovale im algebraischen Modell über \mathbb{F}_2	106
1.4.4.	Ovale und Abbildungen ohne Modell	106
1.4.5.	Ovale und Abbildungen im algebraischen Modell über \mathbb{F}_2	107
1.5.	Ovale in der projektiven Inzidenzebene mit $n = 3$	108
1.5.1.	Anzahl der Ovale	108
1.5.2.	Ovale im geometrischen Modell der Figur II, 18	109
1.6.	Weitere Möglichkeiten	110
2.	Geometrie-Algebra	110
2.1.	Was heißt Algebraisieren?	110
2.2.	Algebraisierbarkeit affiner Inzidenzebenen mit Körpern	111
2.2.1.	Das Problem	111
2.2.2.	Der Algebraisierbarkeitsbeweis	111
2.3.	Algebraisierbarkeit affiner Inzidenzebenen mit anderen Strukturen	115
2.4.	Ausblicke	115
3.	Endliche Inzidenzstrukturen	115
3.1.	Vergrößerung und Verkleinerung des Axiomensystems	115
3.2.	Die Hierarchie endlicher Inzidenzstrukturen	116
3.2.1.	Allgemeine Inzidenzstrukturen	116
3.2.2.	Endliche Inzidenzstrukturen	116
3.2.3.	Taktische Konfigurationen	116
3.2.4.	Blockpläne	117
3.2.5.	Endliche und projektive Inzidenzebenen	117
3.3.	Untersuchung von Blockplänen	118
3.3.1.	Polygonmodelle spezieller Blockpläne	118
3.3.2.	Steiner-Tripel-Systeme	120
3.3.3.	Ungelöste Blockplanprobleme	123
3.3.4.	Blockpläne mit zusätzlichen Parametern	124
Literatur	128