

Inhalt

I. Teil: Algebra der Mittelstufe

1. Vorbemerkungen (K. Wigand)	
1.1 Was ist Algebra?	11
1.11 Historisches, 1.12 Einige Begriffe, 1.13 Arten der Bestimmungsgleichungen, 1.14 Arithmetik und Algebra, 1.15 Wandlungen der Algebra, 1.16 Folgerungen für die Schule	
2. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten (K. Wigand)	14
2.1 Einfache Bestimmungsgleichungen	14
2.11 Das Umformen der Seiten, 2.12 Lösung durch Transposition, 2.13 Lösung durch Gleichbehandlung, 2.14 Scheinbare Bestimmungsgleichungen, 2.15 Scheinbar quadratische Gleichungen, 2.16 Gleichungen mit allgemeinen Zahlen, 2.17 Übungen	
2.2 Historische Verfahren	16
2.21 Die Methode des falschen Ansatzes, 2.22 Das klassische Verfahren, 2.23 Die altägyptische Haurechnung, 2.24 Übungen	
2.3 Bruchgleichungen	18
2.31 Definition, 2.32 Die scheinbaren Bruchgleichungen, 2.33 Die eigentlichen Bruchgleichungen, 2.34 Bruchgleichungen mit allgemeinen Zahlen, 2.35 Didaktisches, 2.36 Übungen	
2.4 Verhältnisgleichungen	20
2.41 Methodisches, 2.42 Bezeichnungen, 2.43 Produktgleichung, 2.44 Korrespondierendes Addieren und Subtrahieren, 2.45 Kettenproportion, 2.46 Übungen	
2.5 Textaufgaben	22
2.51 Die Lösungsschritte, 2.52 Altersbestimmungen, 2.53 Ein Denk-Schema für den Ansatz, 2.54 Lösung durch Rückschließen, 2.55 Prozentrechnung, 2.56 Bewegungsaufgaben, 2.57 Behälter-Aufgaben, 2.58 Zur Geschichte	
2.6 Einige „bürgerliche“ Rechnungsarten	25
2.61 Zur Kennzeichnung, 2.62 Durchschnittsrechnung, 2.63 Mischungsrechnung, 2.64 Gesellschaftsrechnung	
2.7 Die Bilanzgleichung	27
2.71 Vorbemerkung, 2.72 Einige einfache Bilanzen, 2.73 Aktiva-Passiva, 2.74 Doppelte Buchführung als Gleichungslehre, 2.75 Übungen, 2.76 Die Gewinn- und Verlustrechnung	
3. Funktionen (K. Wigand)	
3.1 Zum Begriff	29
3.11 Empirische Funktionen, 3.12 Wertetafel, Bild, Skala, 3.13 Die Funktionsgleichung, 3.14 Die Dirichlet-Definition, 3.15 Der Funktionsbegriff, 3.16 Relation-Funktion	
3.2 Die Proportionalität	32
3.21 Das Phänomen der Verhältnisgleichheit, 3.22 Definition, 3.23 Der Proportionalitätsfaktor, 3.24 Die zentrale Stellung des Begriffs, 3.25 Proportionalität zu mehreren Größen	
3.3 Weitere Proportionalitäten	34
3.31 Höhere Proportionalitäten, 3.32 Potenzfunktionen mit gerader Hochzahl, 3.33 Potenzfunktionen mit ungerader Hochzahl, 3.34 $y = \sqrt{x}$, 3.35 Die indirekte oder umgekehrte Proportionalität, 3.36 Hyperbeln, 3.37 Verbundene Proportionalitäten	
3.4 Die lineare Funktion	37
3.41 Die Formen, 3.42 Die Gerade als Bild, 3.43 Lineare Beziehungen, 3.44 Graphischer Fahrplan, 3.45 Zeichnerische Lösung einer linearen Gleichung, 3.46 Lineare Relation – Funktion, 3.47 Übungen	
4. Systeme linearer Gleichungen (K. Wigand)	
4.1 Zwei Gleichungen I	40
4.11 Die Lösungsidee, 4.12 Gleichsetzverfahren, 4.13 Zeichnerische Lösung, 4.14 Einsetzverfahren, 4.15 Parameterverfahren, 4.16 Falscher Ansatz, 4.17 Didaktische Bemerkung, 4.18 Übungen	

4.2 Zwei Gleichungen II	43
4.21 Additionsverfahren, 4.22 Äquivalente Systeme, 4.23 Matrizen, Determinanten, 4.24 Lineare Abhängigkeit, 4.25 Zur geometrischen Bedeutung, 4.26 Homogene Systeme, 4.27 Inhomogene Systeme, 4.28 Methodisches, 4.29 Übungen	
4.3 Zwei Gleichungen/Anwendungen	47
4.31 Textaufgaben, 4.32 Einführung von Hilfsunbekannten, 4.33 Die duale zeichnerische Behandlung, 4.34 Übungen	
4.4 Zweireihige Determinanten	49
4.41 Ja oder nein? 4.42 Determinante als Flächeninhalt, 4.43 Rechenregeln, 4.44 Übungen	
4.5 Drei Gleichungen	50
4.51 Das Ziel, 4.52 Einsetzverfahren, 4.53 Additionsverfahren, 4.54 Zeichnerische Lösung, 4.55 Parallele Ebenen, 4.56 Das homogene System, 4.57 Das inhomogene System, 4.58 Übungen	
4.6 Dreireihige Determinanten	54
4.61 Sarrus-Regel, 4.62 Drei lineare Gleichungen, 4.63 Rechenregeln, 4.64 Geometrische Bedeutung, 4.65 Übungen	
4.7 Ergänzungen	56
4.71 Vektoren, 4.72 Matrizen, 4.73 n Gleichungen, 4.74 Das Gauß-Eliminationsverfahren, 4.75 Übungen	
4.8 Unter- und überbestimmte Systeme von Bedingungen	58
4.81 Allgemeines über Nebenbedingungen und Einschränkungen, 4.82 Eine Gleichung mit einer Unbekannten, 4.83 Eine Gleichung mit zwei Unbekannten, 4.84 Zwei und mehr Gleichungen, 4.85 Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, 4.86 Übungen	
5. Linearplanung (Linear Programming) (K. Wigand)	
5.1 Lineare Ungleichungen	60
5.11 Zwei Veränderliche, 5.12 Einfache Einführungsaufgabe, 5.13 Systeme linearer Ungleichungen, 5.14 Übungen, 5.15 Einfache Anwendungen	
5.2 Linearplanung bei wenigen Veränderlichen	63
5.21 Das allgemeine Problem, 5.22 Maximum oder Minimum linearer Funktionen, 5.23 Beweis des Hauptsatzes, 5.24 Übungen, 5.25 Maximalisierung von Gewinnen. Beispiele	
5.3 Ausblicke	66
5.31 Im dreidimensionalen Raum, 5.32 n Dimensionen, 5.33 Zur schulischen Behandlung, 5.34 Literatur	
6. Quadratische Gleichungen (K. Wigand)	
6.1 Algebraische Wege	67
6.11 Formen der quadratischen Gleichung, 6.12 Gleichbedeutende Aufgaben, 6.13 Die reinquadratische Gleichung, 6.14 Die unvollständige quadratische Gleichung, 6.15 Ganzzahlige p, q , 6.16 Auflösungsformel, 6.17 Historische Verfahren, 6.18 Übungen, 6.19 Einfache reduzierbare Gleichungen höheren Grades	
6.2 Graphische Verfahren	70
6.12 Verschiebung der Grundparabel, 6.22 Schnittbestimmung mit der x -Achse, 6.23 Geometrische Deutung der komplexen Lösungen, 6.24 Feste Grundparabel, 6.25 Affinänderungen, 6.26 Projektive Abbildung, 6.27 Unendlich große Wurzel, 6.28 Übungen	
6.3 Geometrische Lösungen	74
6.31 Höhensatz, 6.32 Sehnen-Sekanten-Satz, 6.33 Die Zweikreistangentenfigur, 6.34 Lill-Verfahren, 6.35 Das zu Lill polare Verfahren, 6.36 Bestimmung nach von Staudt, 6.37 Euklid und die Kegelschnitte, 6.38 Übungen	
6.4 Numerische und nomographische Methoden	82
6.41 Verbesserung von Näherungswerten, 6.42 Regula falsi, 6.43 Rationale Näherungen, 6.44 Rechenstab, 6.45 Weitere Verfahren, 6.46 Fluchtentafel, 6.47 Netztafel, 6.48 Übungen	
6.5 Ungleichungen	87
6.51 Quadratische Ungleichungen, 6.52 Bruchungleichungen, 6.53 Übungen	
6.6 Wurzelgleichungen	87
6.61 Rechnerische Lösung, 6.62 Arten von Wurzelgleichungen, 6.63 Wurzelgleichung mit allgemeinen Zahlen, 6.64 Zeichnerische Lösung, 6.65 Übungen	
6.7 Spätere Anwendungen	90
6.71 Einfache Extremwertaufgaben, 6.72 Additive Zusammensetzung, 6.73 Quadratische Interpolation, 6.74 Die Simpson-Formel	

6.8 Die Wurfparabel	92
6.81 Entstehung, 6.82 Geschwindigkeit, Beschleunigung, 6.83 Eigenschaften, 6.84 Übungen, 6.85 Ballistische Näherungskurven	
6.9 Literatur	94
7. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten (K. Wigand)	
7.1 Einfache Systeme	94
7.11 Sonderfälle, 7.12 Eine lineare und eine quadratische Gleichung, 7.13 Zwei quadratische Gleichungen, 7.14 Übungen, 7.15 Historische Aufgaben	
7.2 Geometrische Behandlung	97
7.21 Methodische Bemerkung, 7.22 Zeichnerische Lösung, 7.23 Ungleichungen, 7.24 Die allgemeine quadratische Gleichung, 7.25 Übungen	
7.3 Schwierigere Fälle	100
7.31 Symmetrische Gleichungen, 7.32 Eine homogene und eine beliebige quadratische Gleichung, 7.33 Zwei Gleichungen ohne Linearglieder, 7.34 Weitere reduzierbare Systeme, 7.35 Zerlegbare Gleichungen, 7.36 Verfahren mit Determinanten, 7.37 Der allgemeine Fall, 7.38 Übungen, 7.39 Literatur	

II. Teil: Algebra der Oberstufe

1. Gleichungen 3. und 4. Grades (J. Breuer)	
1.1 Rechnerische Lösung der Gleichung 3. Grades	104
1.11 Allgemeine Gleichung 3. Grades, 1.12 Koeffizientensätze, 1.13 Reduzierte Gleichung, 1.14 Lösung durch Wurzelziehen, 1.15 Methodische Bemerkungen, 1.16 Übungen	
1.2 Näherungslösungen für die reduzierte Gleichung 3. Grades	110
1.21 Goniometrische Lösung, 1.22 Graphische Lösung, 1.23 Lösung mit dem Rechenstab, 1.24 Verfahren von Lill, 1.25 Nomographische Lösung, 1.26 Methodische Bemerkungen, 1.27 Übungen	
1.3 Lösung der Gleichung 4. Grades	118
1.31 Koeffizientensätze, 1.32 Besondere Gleichungen, 1.33 Reduzierte Gleichung, 1.34 Resolventen 3. Grades, 1.35 Graphische Lösung, 1.36 Verfahren von Lill, 1.37 Methodische Bemerkungen, 1.38 Übungen	
1.4 Allgemeine Näherungsverfahren	124
1.41 Regula falsi, 1.42 Newtons Verfahren, 1.43 Iterationsverfahren, 1.44 Das Verfahren von Graeffe, 1.45 Methodische Bemerkungen, 1.46 Übungen	
1.5 Ergänzungen	129
1.51 Textaufgaben, 1.52 Übungen, 1.53 Literatur	
2. Ganze rationale Funktionen nten Grades (J. Breuer)	
2.1 Einführung	131
2.11 Definition der ganzen rationalen Funktion, 2.12 Horner-Schema, 2.13 Größter gemeinsamer Teiler; Euklid-Algorithmus, 2.14 Methodische Bemerkungen, 2.15 Übungen	
2.2 Die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen	138
2.21 Schranken für die reellen Wurzeln, 2.22 Der Satz von Budan-Fourier, 2.23 Die Cartesische Zeichenregel, 2.24 Die Sturm-Kette, 2.25 Der Fundamentalsatz der Algebra, 2.26 Koeffizientensätze; symmetrische Grundfunktionen, 2.27 Übungen	
2.3 Reduzible und irreduzible Funktionen	148
2.31 Der Begriff der Reduzibilität, 2.32 Fundamentalsatz der irreduziblen Funktionen, 2.33 Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel, 2.34 Unmöglichkeitssatz von Abel, 2.35 Transzendenz von e und π , 2.36 Methodische Bemerkungen, 2.37 Übungen	
2.4 Interpolation	152
2.41 Interpolation nach Lagrange, 2.42 Interpolation nach Newton, 2.43 Näherungspolynome; Schmiegeparabeln, 2.44 Methodische Bemerkungen, 2.45 Übungen	
2.5 Literatur	157
3. Einheitswurzeln, Kreisteilung und Konstruierbarkeit (P. Knabe)	
3.1 Einheitswurzeln	158
3.11 Stoffaufteilung im Lehrplan, 3.12 Erklärung der n ten Einheitswurzeln, 3.13 Berechnung, 3.14 Zusammenhänge, 3.15 Die Gruppeneigenschaft	
3.2 Kreisteilung und regelmäßige Vielecke	161
3.21 Kreisteilungsgleichung, 3.22 Algebraische Lösung einiger Kreisteilungsaufgaben	

3.3 Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal	163
3.31 Geometrische Grundkonstruktionen und algebraische Operationen, 3.32 Irreduzibilitätskriterien, 3.33 Unlösbarkeit der kubischen Gleichung durch Quadratwurzeln	
3.4 Die klassischen Probleme	165
3.41 Unmöglichkeitbeweis der Verdopplung des Würfels, 3.42 Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, 3.43 Gauß-Vielecke, 3.44 Dreiteilung des Winkels, 3.45 Quadratur des Kreises, 3.46 Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln	
3.5 Ergänzungen	167
3.51 Übungen, 3.52 Historisches, 3.53 Literatur	
4. Besondere Gleichungen (J. Breuer)	
4.1 Reziproke Gleichungen	168
4.11 Begriff, 4.12 Gleichungen 3. Grades, 4.13 Gleichungen 4. Grades, 4.14 Gleichungen höheren Grades, 4.15 Übungen	
4.2 Diophant-Gleichungen	172
4.21 Gleichungen 1. Grades, 4.22 Gleichungen 2. Grades, 4.23 Gleichungen höheren Grades, 4.24 Übungen	
4.3 Besondere Sätze über algebraische Gleichungen.	176
4.31 Euler-Ungleichung, 4.32 Satz von de Gua, 4.33 Satz von Toeplitz, 4.34 Satz von Hermite, 4.35 Übungen	
4.4 Ergänzungen	178
4.41 Methodische Bemerkungen, 4.42 Literatur	
5. Ungleichungen (J. Breuer)	
5.1 Rechengesetze	179
5.11 Addieren und Subtrahieren, 5.12 Multiplizieren und Dividieren, 5.13 Potenzieren und Radizieren, 5.14 Ungleichungen und Grenzprozesse, 5.15 Übungen	
5.2 Ungleichungen in der Arithmetik	181
5.21 Einführende Beispiele, 5.22 Cauchys Ungleichungen, 5.23 Bernoulli-Ungleichung, 5.24 Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel, 5.25 Ungleichungen für die Zahl e , 5.26 Übungen	
5.3 Ungleichungen in der Analysis	186
5.31 Anwendungen in der Trigonometrie, 5.32 Ellipsenumfang, 5.33 Formel von Wallis, 5.34 Stirling-Formel, 5.35 Summenabschätzung mit Hilfe bestimmter Integrale, 5.36 Übungen	
5.4 Literatur	191
6. Aus der Theorie der algebraischen Kurven (J. Lauter)	
6.1 Begriff und Darstellung algebraischer Kurven	191
6.11 Kartesische Koordinaten, 6.12 Homogene bzw. projektive Koordinaten, 6.13 Parameterdarstellung, 6.14 Die Klasse einer algebraischen Kurve, 6.15 Übungen	
6.2 Einfache Singularitäten	195
6.21 Doppelpunkt, isolierter Punkt, Rückkehrpunkt, 6.22 Untersuchung des Nullpunktes, 6.23 Untersuchung eines beliebigen Punktes, 6.24 Einfache Singularitäten bei Klassenkurven, 6.25 Übungen	
6.3 Charakteristische Konstanten	197
6.31 Schnittpunkte algebraischer Kurven, 6.32 Anzahl der bestimmenden Punkte, 6.33 Das Cramer-Paradoxon, 6.34 Die Höchstzahl der einfachen Singularitäten, 6.35 Das Geschlecht einer algebraischen Kurve	
6.4 Diskussion algebraischer Kurven	200
6.41 Gebietsenteilung durch Binomialzerlegung, 6.42 Das analytische Dreieck, 6.43 Weitere Gesichtspunkte für die Diskussion	
6.5 Beispiele	206
6.51 Kurve 3. Ordnung, 6.52 Kurve 4. Ordnung, 6.53 Kurve 6. Ordnung, 6.54 Übungen	
6.6 Literatur	208
7. Spezielle algebraische Kurven (J. Lauter)	
7.1 Geometrische Definition algebraischer Kurven	208
7.11 Definitionsprinzipien, 7.12 Kissoiden und Konchoiden	
7.2 Kurven dritter Ordnung.	209
7.21 Klassifikation, 7.22 Kissoiden dritter Ordnung, 7.23 Serpentine und Versiera, 7.24 Weitere Trisektrix-Kurven, 7.25 Übungen	

7.3 Kurven vierter Ordnung	215
7.31 Die Konchoide des Nikomedes, 7.32 Die Pascal-Schnecke, 7.33 Die Cassini-Kurven, 7.34 Die Kappa-Kurve, 7.35 Kurven der Form $x^4 + y^4 = f(x, y)$, 7.36 Kurven der Form $x^4 - y^4 = f(x, y)$, 7.37 Drei verwandte Kurven, 7.38 Weitere Kurven, 7.39 Übungen	
7.4 Kurven höherer Ordnung	222
7.41 Drei verwandte Kurven fünfter Ordnung, 7.42 Weitere Kurven fünfter Ordnung, 7.43 Die Rosette, 7.44 Die Doppelei-Linie, 7.45 $x^6 - a^2 x^4 + y^2 = 0$, 7.46 Zwei verwandte Kurven sechster Ordnung, 7.47 $(y - x^2)^2(x^2 + 1) = a^2 - x^2$, 7.48 Eine Kurve achter Ordnung, 7.49 Übungen	
7.5 Literatur	227
8. Geschichtliche Entwicklung (J. Breuer)	
8.1 Ursprung	227
8.11 Babylonier und Ägypter, 8.12 Griechen, 8.13 Inder, 8.14 Araber	
8.2 Entfaltung	228
8.21 Das christliche Mittelalter, 8.22 Cardano und seine Zeitgenossen, 8.23 Vieta, 8.24 Fermat, 8.25 Descartes	
8.3 Vollendung	231
8.31 Das 18. Jahrhundert, 8.32 Das 19. Jahrhundert, 8.33 Gauß, 8.34 Abel, 8.35 Galois	
8.4 Literatur	233

III. Teil: Spezielle Probleme

1. Algebraische Strukturen (K. Seebach)	
1.1 Mathematische Strukturen	235
1.11 Elemente und Relationen, 1.12 Homomorphismen, Isomorphismen, Automorphismen, 1.13 Algebren, 1.14 Übungen	
1.2 Gruppen	238
1.21 Gruppenaxiome mit den wichtigsten Folgerungen, 1.22 Verschiedene Typen von Gruppen, 1.23 Untergruppen, 1.24 Automorphismen, konjugierte Untergruppen, Normalteiler, Kompositionsreihen, 1.25 Homomorphismen, Faktorgruppe, 1.26 Übungen	
1.3 Ringe und Integritätsbereiche	247
1.31 Ringaxiome und wichtige Folgerungen, besonders im Hinblick auf die Schulmathematik, 1.32 Integritätsbereiche, 1.33 Ideale, Restklassenringe, 1.34 Übungen	
1.4 Körper	251
1.41 Definition und elementare Eigenschaften, 1.42 Erweiterung eines Integritätsbereiches zu einem Körper, 1.43 Unterkörper, Oberkörper, Primkörper, Charakteristik, 1.44 Adjunktion eines Elementes, algebraische und transzendente Erweiterung, Grad eines Oberkörpers, 1.45 Algebraische Charakterisierung des Körpers der reellen und des Körpers der komplexen Zahlen, 1.46 Übungen	
1.5 Verbände	257
1.51 Definition, Kennzeichnung besonderer Verbände, 1.52 Dualer Verband	
1.6 Lineare Vektorräume	258
1.61 Axiome, lineare Abhängigkeit, lineare Mannigfaltigkeiten, 1.62 Basis, Dimension, 1.63 Metrik, der euklidische Vektorraum, 1.64 Übungen	
1.7 Literatur	263
2. Lineare Algebra (K. Seebach)	
2.1 Determinanten	264
2.11 Definition als Inhaltsmaß, 2.12 Algebraische Definition, 2.13 Wichtigste Eigenschaften, 2.14 Entwicklungssätze, 2.15 Produktsatz, 2.16 Übungen	
2.2 Matrizen	272
2.21 Definition, 2.22 Rang einer Matrix, 2.23 Elementare Operationen mit Matrizen, 2.24 Transponierte und inverse Matrix, 2.25 Darstellung linearer Transformationen, 2.26 Besondere Typen von Matrizen, 2.27 Äquivalente Matrizen und ihre Invarianten, charakteristisches Polynom, Eigenwerte, 2.28 Transformation auf Normalform, 2.29 Übungen	
2.3 Lineare Gleichungssysteme	285
2.31 Problemstellung, 2.32 Kriterien für die Lösbarkeit, 2.33 Zusammenhang zwischen homogenem und inhomogenem System, 2.34 Homogene Systeme, 2.35 Inhomogene Systeme, 2.36 Cramer-Regel, 2.37 Übungen	
2.4 Literatur	291
Register	293