

Inhalt

2.	Analytische Darstellung der euklidischen Geometrie	9
2.1.	Die Methode der analytischen Geometrie	9
2.1.1.	Analytische Geometrie und verwandte Disziplinen	9
2.1.2.	Abszissen auf einer Geraden	11
2.1.3.	Koordinaten in der Ebene und im Raum	12
2.1.4.	Höherdimensionale Räume	15
2.1.5.	RENÉ DESCARTES, PIERRE DE FERMAT und ihre Beiträge zur Herausbildung der analytischen Geometrie	16
2.1.6.	Aufgaben	18
2.2.	Vektoren, ihre Addition und Vervielfachung	18
2.2.1.	Die Komponenten eines Vektors	18
2.2.2.	Addition von Vektoren	20
2.2.3.	Vervielfachung von Vektoren	21
2.2.4.	Vektorraum und Punktraum	23
2.2.5.	Aufgaben	25
2.3.	Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Volumen	25
2.3.1.	Das Skalarprodukt	25
2.3.2.	Betrag eines Vektors	27
2.3.3.	Orientierung von Vektorpaaren in der Ebene. Die Graßmannsche Ergänzung	28
2.3.4.	Trigonometrische Funktionen. Elementarwinkelgröße	30
2.3.5.	Flächeninhalt, Größe orientierter Elementarwinkel	32
2.3.6.	Orientierung von Vektortripeln. Das Vektorprodukt	34
2.3.7.	Volumen	36
2.3.8.	Übertragung auf höherdimensionale Räume	37
2.3.9.	Aufgaben	37

2.4.	Lineare Parameterdarstellungen	38
2.4.1.	Geraden, Strahlen, Strecken; Teilverhältnis	38
2.4.2.	Ebenen, Halbebenen, Dreiecksflächen; Raum, Halbräume, Tetraederkörper	42
2.4.3.	Lineare Mannigfaltigkeiten	44
2.4.4.	Durchschnitt und lineare Hülle. Der Dimensionssatz	46
2.4.5.	Durchschnittsberechnung. Parallele und windschiefe Mannigfaltigkeiten	47
2.4.6.	Lagemöglichkeiten linearer Mannigfaltigkeiten im R^2 und R^3	49
2.4.7.	Aufgaben	50
2.5.	Lineare Gleichungen	51
2.5.1.	Stellungsvektor, Hessesche Normalform, Lot; Neigungswinkel	51
2.5.2.	Parallele und konzentrische Hyperebenen	56
2.5.3.	Symmetriehyperebenen	59
2.5.3.1.	Mittelsenkrechte	59
2.5.3.2.	Winkelhalbierende und Mittelparallele	60
2.5.4.	Spezielle Hyperebenengleichungen	61
2.5.5.	Aufgaben	63
2.6.	Konvexe Polygone	64
2.6.1.	Konvexe Hülle, Schwerpunkt	64
2.6.2.	Die Sätze von CEVA und MENELAOS	65
2.6.3.	Sätze für Dreiecke	69
2.6.4.	Aufgaben	72
2.7.	Bewegungen und Koordinatentransformationen	73
2.7.1.	Invarianz von Skalarprodukten, Summen und Vielfachen	73
2.7.2.	Orthogonale Matrizen	74
2.7.3.	Verschiebungen, spezielle Spiegelungen und Drehungen	75
2.7.4.	Koordinatentransformationen	77
2.7.5.	Aufgaben	78
2.8.	Kurven zweiter Ordnung	79
2.8.1.	Der Kreis	79
2.8.2.	Ellipse, Parabel, Hyperbel	82
2.8.3.	Diskussion der Kurven zweiter Ordnung	87
2.8.4.	Tangenten, Pol und Polare	89
2.8.5.	Aufgaben	94
2.9.	Ausblick auf weitere Themen der analytischen Geometrie	95
3.	Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie	97
3.1.	Das Erlanger Programm	97
3.2.	Bewegungen	98
3.2.1.	Aufgaben	103
3.3.	Ähnlichkeitstransformationen	103
3.3.1.	Zentralstreckungen	103
3.3.2.	Allgemeine Ähnlichkeitstransformationen	110
3.3.3.	Aufgaben	122

3.4	Affine Transformationen	122
3.4.1.	Orthogonalstreckungen	123
3.4.2.	Analytische Definition der ebenen affinen Abbildungen	127
3.4.3.	Synthetische Definition und konstruktive Behandlung der affinen Abbildungen	129
3.4.4.	Fixpunkte von Affinitäten	130
3.4.5.	Axiale Affinitäten	131
3.4.6.	Der Inhaltsmaßstab von Affinitäten	136
3.4.7.	Fixpunktkonstruktionen	138
3.4.8.	Die Affinitäten als Gruppe	141
3.4.9.	Ausblick auf singuläre affine Abbildungen	142
3.4.10.	Ausblick auf affine Abbildungen in höherdimensionalen Räumen	143
3.4.11.	Aufgaben	144
3.5.	Projektive Transformationen	145
3.5.1.	Zentralkollineationen	146
3.5.2.	Ausblick auf Kollineationen	155
3.5.3.	Aufgaben	156
3.6.	Spiegelungen an Kreisen	156
3.6.1.	Aufgaben	162
4.	Theorie der geometrischen Konstruktionen	163
4.1.	Einleitung und historische Bemerkungen	163
4.2.	Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	169
4.2.1.	Konstruktion von Strecken der Maßzahlen $a + b$, $a - b$, $n \cdot a$, a/n , $a \cdot b$, a/b , \sqrt{a} aus Strecken der Maßzahlen 1, a , b	169
4.2.2.	Über die Behandlung von Konstruktionsaufgaben	172
4.2.3.	Der I. Teil der Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe	173
4.2.4.	Der II. Teil der Behandlung jeder Konstruktionsaufgabe	175
4.2.5.	Einige Beispiele für Konstruktionsaufgaben	176
4.2.6.	Das Berührungsproblem des APOLLONIUS	186
4.3.	Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in algebraischer Behandlung	188
4.3.1.	Algebraische Fassung geometrischer Konstruktionsprobleme	188
4.3.2.	Entscheidung über die Lösbarkeit geometrischer Konstruktionsaufgaben durch algebraische Betrachtungen	192
4.3.3.	Konstruierbare Zahlen und zwei Hilfssätze aus der Algebra	194
4.4.	Die Unlösbarkeit einiger Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal	197
4.4.1.	Die „Verdoppelung des Würfels“ (auch das „Delische Problem“ genannt)	197
4.4.2.	Die „Dreiteilung des Winkels“	198
4.4.3.	„Konstruktion des regelmäßigen 7-Ecks“	199
4.4.4.	„Konstruktion eines Dreiecks aus a , b , w_α “	200
4.4.5.	„Konstruktion eines Dreiecks aus w_α , w_β , w_γ “	202
4.4.6.	Eine vollständige Aufzählung aller lösbaren und unlösbaren Dreiecks-konstruktionsaufgaben aus Seiten, Winkeln, Höhen, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden	203

4.4.7.	Aufgaben	205
4.5.	Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln	205
4.5.1.	Eine Winkeldreiteilung	206
4.5.2.	Die Mohr-Mascheroni-Konstruktionen mit dem Zirkel allein	207
4.5.3.	Konstruktionen mit dem Lineal allein	208
4.5.4.	Konstruktionen in begrenzter Ebene	209
4.5.5.	Bemerkungen über das Parallellineal, das Winkellineal und das Einschiebelineal	210
	Literatur	212
	Namen- und Sachverzeichnis	213