

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	XI
<b>Statistische Entscheidungsmodelle</b> .....	1
1. Entscheidungstheoretisches Grundmodell .....	1
a) Entscheidungsproblem des Statistikers .....	1
b) Parameterraum .....	2
c) Aktionsraum .....	3
d) Schadenfunktion .....	3
e) Entscheidungsbaum .....	4
2. Klassisches Modell .....	5
a) Stichprobenraum und statistisches Verfahren .....	5
b) Menge der statistischen Verfahren .....	6
c) Risikofunktion .....	7
d) Gleichmäßig beste Verfahren .....	8
e) Entscheidung im klassischen Modell .....	8
3. Bayes Modell .....	9
a) Prioriverteilung .....	9
b) Bayes Risiko .....	10
c) Entscheidung im Bayes Modell .....	12
4. Wald Modell .....	12
a) Schadenfunktion .....	12
b) Minimax Regel .....	13
c) Bayes Regel .....	15
d) Entscheidung im Wald Modell .....	16
<b>A) Klassisches Modell</b> .....	17
<i>I. Stichprobe</i> .....	19
1. Einfache Stichprobe .....	19
a) Unabhängig und identisch verteilt .....	19
b) Gemeinsame Verteilungsfunktion .....	19
c) Likelihoodfunktion .....	20
2. Stichprobenfunktion .....	20
a) Stichprobenfunktion als Zufallsvariable .....	20
b) Stichprobenmomente .....	21
c) Ordnungsmaßzahlen .....	22
3. Suffizienz .....	22
a) Definition der Suffizienz .....	22
b) Faktorisationskriterium .....	23
c) Minimal suffizient .....	24
4. Exponentialfamilie .....	24
a) Einparametrische Exponentialfamilie .....	24

b) Suffiziente Stichprobenfunktion einer einfachen Stichprobe aus einer Verteilung der einparametrischen Exponentialfamilie . . . . .	25
c) k-parametrische Exponentialfamilie . . . . .	25
<b>Aufgaben und weitere Ergebnisse . . . . .</b>	<b>26</b>
<i>II. Testverfahren . . . . .</i>	<i>28</i>
1. Terminologie der klassischen Testtheorie . . . . .	28
a) Null- und Alternativhypothese . . . . .	28
b) Testfunktion . . . . .	28
c) Fehlerarten . . . . .	30
d) Fehlerwahrscheinlichkeiten . . . . .	32
2. Beste Testfunktion . . . . .	33
a) Schadenfunktion der klassischen Testtheorie . . . . .	33
b) Dilemma der klassischen Testtheorie . . . . .	36
c) Dominanz, Zulässigkeit und Vollständigkeit . . . . .	37
3. Neyman Pearson Theorie . . . . .	37
a) Signifikanzniveau und Macht . . . . .	37
b) Gütefunktion . . . . .	38
4. Einfache Hypothesen . . . . .	38
a) Neyman Pearson und Teststatistik . . . . .	38
b) Randomisierte Testfunktion . . . . .	40
5. Einseitige Hypothesen . . . . .	41
a) Monotoner Likelihoodquotient . . . . .	41
b) Einparametrische Exponentialfamilie und gleichmäßig beste Testfunktion . . . . .	44
6. Zweiseitige Hypothesen . . . . .	44
a) Unverzerrte Testfunktion . . . . .	44
b) Einparametrische Exponentialfamilie und unverzerrte gleichmäßig beste Testfunktion . . . . .	46
c) k-parametrische Exponentialfamilie . . . . .	46
7. Likelihoodquotienten Methode (LQ-Methode) . . . . .	47
a) Technik . . . . .	47
b) Eigenschaften . . . . .	48
Aufgaben und weitere Ergebnisse . . . . .	49
<i>III. Intervallschätzverfahren . . . . .</i>	<i>52</i>
1. Vokabular der Intervallschätzverfahren . . . . .	52
a) Konfidenzintervall und -niveau . . . . .	52
b) Zusammenhang zwischen Test- und Intervallschätzverfahren . . . . .	52
c) Überdeckungswahrscheinlichkeiten . . . . .	53
2. Einseitige Konfidenzintervalle . . . . .	54
a) Gleichmäßig beste Intervallschätzfunktion . . . . .	54
b) Interpretation des Konfidenzniveaus . . . . .	55
3. Zweiseitige Konfidenzintervalle . . . . .	55
a) Unverzerrte Intervallschätzfunktion . . . . .	55

b) Minimaler Erwartungswert der Intervalllänge .....	57
c) Konfidenzintervalle minimaler Länge bei nichtsymmetrischen Verteilungen .....	58
Aufgaben und weitere Ergebnisse	
<i>IV. Punktschätzverfahren</i> .....	61
1. Beste Punktschätzfunktion .....	61
a) Schätzfunktion und Schätzwert .....	61
b) Mittleres Fehlerquadrat einer Schätzfunktion .....	61
2. Beschränkung auf Teilmengen von Punktschätzfunktionen .....	63
a) Unverzerrte Punktschätzfunktion .....	63
b) Cramer Rao Theorem .....	65
c) Bedingung für Punktschätzfunktionen mit minimaler Varianz .....	67
d) Blackwell Rao Theorem .....	68
3. Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode) .....	69
a) Likelihoodgleichungen .....	69
b) ML-Methode für Verteilungen der Exponentialfamilie .....	70
c) Unverzerrtheit und ML-Schätzungen .....	70
d) Asymptotische Eigenschaften der ML-Schätzfunktionen .....	70
Aufgaben und weitere Ergebnisse .....	71
<b>B) Bayes Modell</b> .....	73
<i>I. Posterioriverteilung</i> .....	75
1. Bayes Theorem .....	75
a) Bayes Theorem für Ereignisse .....	75
b) Bayes Theorem für Zufallsvariable .....	75
c) Alternative Formel .....	76
2. Konjugierte Verteilungsfamilien .....	78
a) Konstruktion konjugierter Verteilungsfamilien .....	78
b) Hypothetische Stichprobe .....	80
c) Suffiziente Stichprobenstatistik .....	80
d) Prädiktive Verteilung .....	82
e) Konjugierte Verteilungen für mehrparametrische Exponentialfamilien .....	82
3. Vage Aprioriinformationen .....	84
a) Uneigentliche Prioriverteilung .....	84
b) Priorigleichverteilung .....	84
c) Weitere uneigentliche Prioriverteilungen .....	85
Aufgaben und weitere Ergebnisse .....	85
<i>II. Testverfahren</i> .....	88
1. Beste Testfunktion .....	88
a) Risikoerwartungswerte .....	88
b) Testfunktion mit minimalen Bayes Risiko .....	90
c) Testfunktion mit minimalem Posteriorischadenerwartungswert .....	90
d) Roll Back Analyse .....	94

e) Posterioriwahrscheinlichkeitsquotient .....	94
2. Einfache Hypothesen .....	97
a) Prioriwahrscheinlichkeitsquotient und Likelihoodquotient .....	97
b) Posterioriwahrscheinlichkeitsquotient .....	98
3. Einseitige Hypothesen .....	99
4. Zweiseitige Hypothesen .....	100
a) Intervallnullhypothese .....	100
b) Punktnullhypothese .....	101
5. Beziehungen zum klassischen Modell .....	102
a) Auswahlkriterium .....	102
b) Signifikanzniveau und Prioriwahrscheinlichkeitsquotient .....	102
c) Unterschiede in der Interpretation der Ergebnisse .....	103
Aufgaben und weitere Ergebnisse .....	104
<i>III. Intervallschätzverfahren</i> .....	106
1. Intervallschätzfunktion des Bayes Modells .....	106
a) Familie von Bayes Intervallen .....	106
b) Niveauvorgabe auch im Bayes Modell .....	107
2. HPD-Intervalle .....	108
a) Minimale Intervalllänge .....	108
b) HPD Intervalle für symmetrische Verteilungen .....	108
c) HPD Intervalle für nichtsymmetrische Verteilungen .....	109
3. Beziehungen zum klassischen Modell .....	110
a) HPD Intervalle und unverzerrte Konfidenzintervalle .....	110
b) Interpretation von Bayes- und Konfidenzintervallen .....	110
Aufgaben und weitere Ergebnisse .....	111
<i>IV. Punktschätzverfahren</i> .....	113
1. Bayes'sche Punktschätzfunktion .....	113
a) Funktionen der Posterioriverteilung .....	113
b) Punktschätzfunktion mit minimalem Bayes Risiko .....	113
c) Punktschätzfunktion mit minimalem Posteriorischaden- erwartungswert .....	117
d) Erwartungswert der Posterioriverteilung .....	117
2. Beziehung zum klassischen Modell .....	120
a) Keine Beschränkung auf unverzerrte Schätzfunktionen .....	120
b) ML-Methode und Modus der Posterioriverteilung .....	120
c) Interpretation bei vager Aprioriinformation .....	120
Aufgaben und weitere Ergebnisse .....	121
<b>C) Wald Modell</b> .....	123
<i>I. Schadenfunktion</i> .....	125
1. Standardschadenfunktionen .....	125
a) Nutzen- und Opportunitätskostenfunktion .....	125
0 – 1 und 0 – $s_1$ -Schadenfunktion .....	126

c) Lineare Schadenfunktion . . . . .	127
d) Quadratische Schadenfunktion . . . . .	128
2. Bayes Regel . . . . .	129
a) Minimales Bayes Risiko . . . . .	129
b) Minimaler Posteriorischadenerwartungswert . . . . .	130
3. Minimax Regel . . . . .	131
a) Minimum des maximal möglichen Schadens . . . . .	131
b) Ungünstige Prioriverteilung . . . . .	131
c) Methoden zur Bestimmung bester statistischer Verfahren nach der Minimax-Regel. . . . .	131
d) Randomisierte statistische Verfahren . . . . .	132
Aufgaben und weitere Ergebnisse . . . . .	132
<i>II. Testverfahren</i> . . . . .	135
1. Beste Testfunktion. . . . .	135
a) Bayes Risiko einer Testfunktion . . . . .	135
b) Beste Testfunktion nach der Bayes Regel. . . . .	136
c) Posteriorischadenerwartungswert und Roll Back Analyse. . . . .	137
d) Quotient aus den Posteriorischadenerwartungswerten . . . . .	140
e) Beste Testfunktion nach der Minimax Regel. . . . .	140
2. Einfache Hypothesen . . . . .	144
a) Beste Testfunktion nach der Bayes Regel. . . . .	144
b) Beste Testfunktion nach der Minimax Regel. . . . .	145
3. Einseitige Hypothesen . . . . .	146
a) $0 - s_1$ Schadenfunktion. . . . .	146
b) Lineare Schadenfunktion . . . . .	147
4. Zweiseitige Hypothesen . . . . .	148
$0 - s_1$ Schadenfunktion . . . . .	148
b) Lineare Schadenfunktion . . . . .	149
c) Quadratische Schadenfunktion . . . . .	150
5. Bezeichnungen zum Bayes und klassischen Modell . . . . .	151
a) Bayes Modell als Spezialfall des Wald Modells und der Bayes Regel . . . . .	151
b) Klassisches Modell als Spezialfall des Wald Modells und der Minimax Regel . . . . .	151
Aufgaben und weitere Ergebnisse . . . . .	152
<i>III. Intervallschätzverfahren</i> . . . . .	154
1. Intervallschätzverfahren im Wald Modell . . . . .	154
a) Schadenfunktion für Intervallschätzverfahren . . . . .	154
b) Beste Intervallschätzfunktion nach der Bayes Regel. . . . .	154
2. Spezielle Schadenfunktionen . . . . .	155
a) Lineare Schadenfunktion . . . . .	155
b) Lineare Schadenfunktion und fixe Intervalllänge . . . . .	156
c) Quadratische Schadenfunktion . . . . .	156

3. Beziehungen zum Bayes Modell .....	157
Aufgaben und weitere Ergebnisse .....	157
<i>IV. Punktschätzverfahren</i> .....	160
1. Beste Punktschätzfunktionen nach der Bayes Regel .....	160
2. Spezielle Schadenfunktionen .....	164
a) 0 – 1 Schadenfunktion und Modus .....	164
b) Lineare Schadenfunktion und Zentralwert .....	164
c) Lineare Schadenfunktion und Quantile .....	166
d) Quadratische Schadenfunktion und Erwartungswert .....	166
3. Beste Punktschätzfunktion nach der Minimax Regel .....	167
4. Beziehungen zum Bayes und klassischen Modell .....	168
Aufgaben und weitere Ergebnisse .....	169
<i>Anhang</i> .....	171
I. Einige Beweise .....	173
II. Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie .....	189
III. Verteilungen .....	199
IV. Literaturverzeichnis .....	206
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	211