

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Ω Notation	5
Inhaltsverzeichnis	7
1 Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung	11
1.1 Problemstellung	11
1.2 Grundlegende Aussagen	12
1.3 Das klassische Differenzenverfahren	16
1.3.1 Die lineare Randwertaufgabe und äquidistante Gitter	16
1.3.2 Semilineare und quasilineare Randwertaufgabe und äquidistante Gitter	23
1.3.3 Nichtäquidistante Gitter	27
1.4 Zugänge zu Differenzenverfahren	33
1.4.1 Mehrpunktformeln	33
1.4.2 Weitere Zugänge zu Differenzenverfahren	35
1.4.3 Kompakte Schemata beliebiger Ordnung	37
1.4.4 Extrapolation und Defektkorrektur	40
1.5 Kollokationsverfahren	42
2 Elliptische Randwertaufgaben zweiter Ordnung: Klassische Lösungen und Differenzenverfahren	51
2.1 Grundlegende Aussagen	51
2.2 Differenzenverfahren für die Poisson-Gleichung	57
2.2.1 Die Fünfpunkt-Formel im Einheitsquadrat	57
2.2.2 Mehrpunkt-Diskretisierungen	60
2.2.3 Diskretisierung in einem beliebigen Gebiet	62
2.3 Allgemeine Differentialoperatoren	65
2.3.1 Allgemeinere elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung	65
2.3.2 Randbedingungen 2. und 3. Art	68
2.4 Weitere Zugänge zu Differenzenverfahren	69
2.4.1 Steklov'sche Mittelungsoperatoren	69
2.4.2 Box-Schemata	71
3 Schwache Lösungen, elliptische Differentialgleichungen und Sobolev-Räume	74
3.1 Einführung	74
3.2 Angepaßte Funktionenräume	76
3.3 Variationsgleichungen und konforme Approximation	89

3.4	Stabile Variationsgleichungen	
3.5	Nichtlineare Probleme	
4	Methode der finiten Elemente	
4.1	Ein Beispiel	
4.2	Finite-Elemente-Räume	
4.2.1	Lokale Elemente und globale Eigenschaften	
4.2.2	Einige wichtige Finite-Elemente-Ansätze im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	
4.3	Bézier-Bernstein-Polynome	
4.3.1	Eindimensionale Splines in Bézier-Bernstein-Darstellung	
4.3.2	Zweidimensionale Splines in Bézier-Bernstein-Darstellung	
4.3.3	Mehrdimensionale B-Splines und Box-Splines	
4.4	Realisierung der Finite-Elemente-Methode	
4.4.1	Struktur der Teilaufgaben	
4.4.2	Grundstrukturen der Daten	
4.4.3	Erzeugung der endlichdimensionalen Probleme	
4.4.4	Gittergenerierung	
4.5	Konvergenz konformer Methoden	
4.5.1	Basisaussagen zur Interpolation in Sobolev-Räumen	
4.5.2	Hilbert-Raum-Abschätzungen	
4.5.3	Gleichmäßige Fehlerabschätzungen	
4.6	Nichtkonforme Finite-Elemente-Methoden	
4.6.1	Einführung	
4.6.2	Ansatzräume mit geringerer Glattheit	
4.6.3	Näherungsweise Integration	
4.6.4	Approximation krummliniger Ränder	
4.7	Gemischte finite Elemente	
4.7.1	Gemischte Variationsgleichungen und Sattelpunkte	
4.7.2	Konforme Approximation gemischter Variationsgleichungen	
4.7.3	Abschwächungen von Glattheitsforderungen	
4.7.4	Penalty-Methoden und modifizierte Lagrange-Funktionen	
4.8	Fehlerschätzer und Gittersteuerung	
4.8.1	Fehlerschätzer nach Babuška und Rheinboldt	
4.8.2	Interpolationsfehlerindikatoren	
4.9	Hinweise zu weiteren interessanten Entwicklungen	
4.9.1	Superkonvergenz	
4.9.2	Die h-, p- und h-p-Version der Methode der finiten Elemente	
4.9.3	Extrapolation und Defektkorrektur	
5	Numerische Verfahren für die diskretisierten Probleme	
5.1	Besonderheiten der Aufgabenstellung	
5.2	Direkte Verfahren	
5.2.1	Das Gauß-Verfahren für Bandmatrizen	
5.2.2	Schnelle Fourier-Transformation zur Lösung der diskreten Poisson-Gleichung	

5.3	Iterationsverfahren	255
5.4	Relaxations- und Splittingverfahren	266
5.5	CG - Verfahren	272
5.6	Mehrgitterverfahren	283
6	Die numerische Behandlung parabolischer Probleme	293
6.1	Analysis parabolischer Probleme	293
6.2	Differenzenverfahren	299
6.3	Die (vertikale) Linienmethode	306
6.3.1	Semidiskretisierung mittels finiter Elemente	307
6.3.2	Die Zeitdiskretisierung mit Standardverfahren	315
6.3.3	Die Zeitdiskretisierung mit diskontinuierlicher Galerkin-Methode	325
6.4	Rothe-Methode	330
6.5	Fehlerkontrolle	334
7	Singuläre Störungen und hyperbolische Probleme	340
7.1	Singuläre Störungen	340
7.1.1	Zweipunkt-Randwertaufgaben	340
7.1.2	Örtlich eindimensionale parabolische Probleme	360
7.1.3	Elliptische Randwertaufgaben (Konvektions-Diffusions-Gleichungen)	365
7.2	Erhaltungsgleichungen	385
7.2.1	Der lineare Fall	385
7.2.2	Zur Analysis der Erhaltungsgleichung im nichtlinearen Fall	388
7.2.3	Numerische Verfahren für die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen	393
8	Numerische Methoden für Variationsungleichungen	402
8.1	Aufgabenstellung	402
8.2	Diskretisierung von Variationsungleichungen	412
8.3	Penalty-Methoden	421
8.4	Wahl der Parameter	437
9	Randintegralmethoden und Randelemente: ein kurzer Abriß	445
9.1	Beispiele von Randintegralgleichungen	446
9.2	Variationsformulierung	449
9.3	Die Randelementmethode	451
9.4	Dualität und das Trefftz-Verfahren	453
	Literaturverzeichnis	457
	Index	474