

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Unendliche Mengen

§ 1. Mengenoperationen	1
§ 2. Eineindeutige Zuordnung	5
§ 3. Abzählbare Mengen	8
§ 4. Die Mächtigkeit des Kontinuums	13
§ 5. Vergleich von Mächtigkeiten	20

Kapitel II. Punktmengen

§ 1. Häufungspunkte	30
§ 2. Abgeschlossene Mengen	33
§ 3. Innere Punkte und offene Mengen	39
§ 4. Abstand und Trennbarkeit	42
§ 5. Die Struktur offener und abgeschlossener Mengen	46
§ 6. Kondensationspunkte. Die Mächtigkeit abgeschlossener Mengen.	51

Kapitel III. Meßbare Mengen

§ 1. Das Maß beschränkter offener Mengen	57
§ 2. Das Maß beschränkter abgeschlossener Mengen	63
§ 3. Äußeres und inneres Maß beschränkter Mengen	68
§ 4. Meßbare Mengen	72
§ 5. Meßbarkeit und Maß als Bewegungsinvarianten	77
§ 6. Klassen meßbarer Mengen	82
§ 7. Allgemeine Bemerkungen über das Maßproblem	87
§ 8. Der Satz von VITALI	89

Kapitel IV. Meßbare Funktionen

§ 1. Definition und einfachste Eigenschaften meßbarer Funktionen	95
§ 2. Weitere Eigenschaften meßbarer Funktionen	99
§ 3. Folgen meßbarer Funktionen. Konvergenz dem Maß nach	102
§ 4. Die Struktur meßbarer Funktionen	109
§ 5. Die WEIERSTRASSschen Sätze	117

Kapitel V. Das LEBESGUE-Integral beschränkter Funktionen

§ 1. Definition des LEBESGUE-Integrals	124
§ 2. Grundlegende Eigenschaften des Integrals	130
§ 3. Grenzübergang unter dem Integralzeichen	137
§ 4. Vergleich des RIEMANN- und des LEBESGUE-Integrals	140
§ 5. Aufsuchen einer Stammfunktion	146

Kapitel VI. Summierbare Funktionen

§ 1. Das Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion	150
§ 2. Summierbare Funktionen mit beliebigem Vorzeichen	159
§ 3. Grenzübergang unter dem Integralzeichen	166

Kapitel VII. Quadratisch summierbare Funktionen

§ 1. Grundlegende Definitionen. Ungleichungen. Norm.	181
§ 2. Konvergenz im Mittel	184
§ 3. Orthogonalsysteme	193
§ 4. Der Raum l^2	204
§ 5. Linear unabhängige Systeme	213
§ 6. Die Räume L_p und l_p	218

Kapitel VIII. Funktionen von endlicher Variation. Das STIELTJES-Integral

§ 1. Monotone Funktionen	227
§ 2. Abbildung von Mengen, Differentiation einer monotonen Funktion	230
§ 3. Funktionen von endlicher Variation	241
§ 4. Das HELLYsche Auswahlprinzip	247
§ 5. Stetige Funktionen von endlicher Variation	250
§ 6. Das STIELTJES-Integral	255
§ 7. Grenzübergang unter dem STIELTJES-Integral	261
§ 8. Lineare Funktionale.	266

Kapitel IX. Absolut stetige Funktionen. Das unbestimmte LEBESGUE-Integral

§ 1. Absolut stetige Funktionen	270
§ 2. Differentialeigenschaften der absolut stetigen Funktionen	273
§ 3. Stetige Abbildungen	275
§ 4. Das unbestimmte LEBESGUE-Integral	280
§ 5. Einführung einer neuen Veränderlichen im LEBESGUE-Integral	290
§ 6. Punkte größter Dichte, approximative Stetigkeit	294
§ 7. Ergänzungen zur Theorie der Funktionen von endlicher Variation und zur Theorie des STIELTJES-Integrals	297
§ 8. Berechnung einer Stammfunktion	301

Kapitel X. Singuläre Integrale. Trigonometrische Reihen. Konvexe Funktionen

§ 1. Fragestellung.	309
§ 2. Darstellung einer Funktion in einem gegebenen Punkt durch ein singuläres Integral	314
§ 3. Anwendung auf die Theorie der FOURIER-Reihen	319
§ 4. Weitere Eigenschaften der trigonometrischen Reihen und der FOURIER-Reihen	328
§ 5. SCHWARZsche Ableitungen und konvexe Funktionen	336
§ 6. Eindeutigkeit der Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe	348

Kapitel XI. Punktmengen im zweidimensionalen Raum

§ 1. Abgeschlossene Mengen	360
§ 2. Offene Mengen	362
§ 3. Maßtheorie ebener Mengen	366
§ 4. Meßbarkeit und Maß als Bewegungsinvarianten	374
§ 5. Der Zusammenhang zwischen dem Maß einer ebenen Menge und dem Maß ihrer Schnitte	380

Kapitel XII. Meßbare Funktionen mehrerer Veränderlichen und ihre Integration

§ 1. Meßbare Funktionen. Erweiterung stetiger Funktionen	385
§ 2. Das LEBESGUE-Integral und seine geometrische Bedeutung	389
§ 3. Der Satz von FUBINI	392
§ 4. Änderung der Reihenfolge der Integrationen	397

Kapitel XIII. Mengenfunktionen und ihre Anwendungen in der Integrationstheorie

§ 1. Absolut stetige Mengenfunktionen	401
§ 2. Das unbestimmte Integral und seine Differentiation	408
§ 3. Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnisse	410

Kapitel XIV. Transfinite Zahlen

§ 1. Geordnete Mengen. Ordnungstypen	415
§ 2. Wohlgeordnete Mengen	421
§ 3. Ordnungszahlen	424
§ 4. Transfinite Induktion	427
§ 5. Die zweite Zahlklasse	428
§ 6. Die Alephs	431
§ 7. Das Axiom und der Satz von ZERMELO	434

Kapitel XV. Die BAIRESche Klassifikation

§ 1. Die BAIRESchen Klassen	438
§ 2. Die BAIRESchen Klassen sind nicht leer	444
§ 3. Die Funktionen der ersten Klasse	451
§ 4. Halbstetige Funktionen	462

Kapitel XVI. Einige Verallgemeinerungen des LEBESGUE-Integrals

§ 1. Einführung	471
§ 2. Definition des PERRON-Integrals	472
§ 3. Grundeigenschaften des PERRON-Integrals	474
§ 4. Das unbestimmte PERRON-Integral	477
§ 5. Vergleich des PERRON-Integrals mit dem LEBESGUE-Integral	480
§ 6. Eine abstrakte Integraldefinition und ihre Verallgemeinerung	484
§ 7. Das DENJOY-Integral im engeren Sinne	491
§ 8. Der Satz von H. HAKE	494
§ 9. Der Satz von P. S. ALEXANDROW und H. LOOMAN	501
§ 10. Das DENJOY-Integral im weiteren Sinne	506

Kapitel XVII. Funktionen mit nicht beschränkten Definitionsbereichen

§ 1. Das Maß einer nicht beschränkten Menge	510
§ 2. Meßbare Funktionen	512
§ 3. Integrale über nicht beschränkte Mengen	513
§ 4. Quadratisch summierbare Funktionen	515
§ 5. Funktionen von endlicher Variation. STIELTJES-Integrale	516
§ 6. Unbestimmte Integrale und absolut stetige Mengenfunktionen	520

Kapitel XVIII. Aus der Funktionalanalysis

§ 1. Metrische und insbesondere lineare normierte Räume	523
§ 2. Kompaktheit	530
§ 3. Kriterien für die Kompaktheit von Mengen in einigen Räumen	536
§ 4. Der BANACHSche Fixpunktsatz und einige Anwendungen	553
Anhang	
I. Die Länge eines Kurvenbogens	565
II. Ein Beispiel von STEINHAUS	569
III. Einige Zusatzbemerkungen über konvexe Funktionen	570
Literaturverzeichnis	577
Namenregister	584
Sachregister	585